数学と理科の接点

「中学生にわかる微積分学」

おさらい編

岡田耕三
（岡山大学大学院自然科学研究科）

今回の内容

微分学入門に関するおさらい
（主に、第２回のテキスト）

ニュートン力学入門
・・・

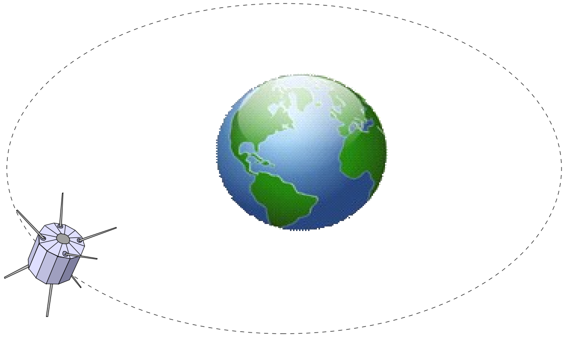
最後の方で，少しだけ，
これまでのテキストに書いてない話をします

私が生まれる
ずっと前の話

問題 地球は自転しています．
赤道上に立っている人の速さは？

速度 ＝ 約 $\boxed{1700}$ km/h
（時速）

問題:　静止衛星は赤道上空約35800kmの高度で地球を周回しています．では，静止衛星の速度は？



地球の赤道半径 ＝ 約6400km

速度 ＝ 約 $\boxed{11000}$ km/h

問題： ゴキブリが逃げ出す速さは？


(wikipediaより)

１秒間に体長のおよそ50倍の距離を逃げる。
http://www.bs-aqua.co.jp/kujo/gokiburi/index5.html

問題： ゴキブリが逃げ出す速さを
人間に換算すると時速何キロ？

人間の身長を1.6mとすると

1秒間には$1.6\times50=80$m走ることに相当する

時速に換算すると

$$80\times3600=288000\text{m}=288\text{km}$$

（出典：Wikipedia）

岡山-新大阪
180km (新幹線)
所要時間 44分

第1経路

所要時間	44分
乗車キロ	180.3 km
合計	6060円
定期	一ヶ月 130140円

乗換	着発	所要	駅名／路線・列車名	運賃
	15:14		岡山	
	◎	44分	新幹線のぞみ32号	2940円
	15:58		新大阪	

http://www.hyperdia.com/

$$\text{分速} = \frac{180\text{km}}{44\text{分}} = 4.1\ \text{km/分}$$

同じ速さ

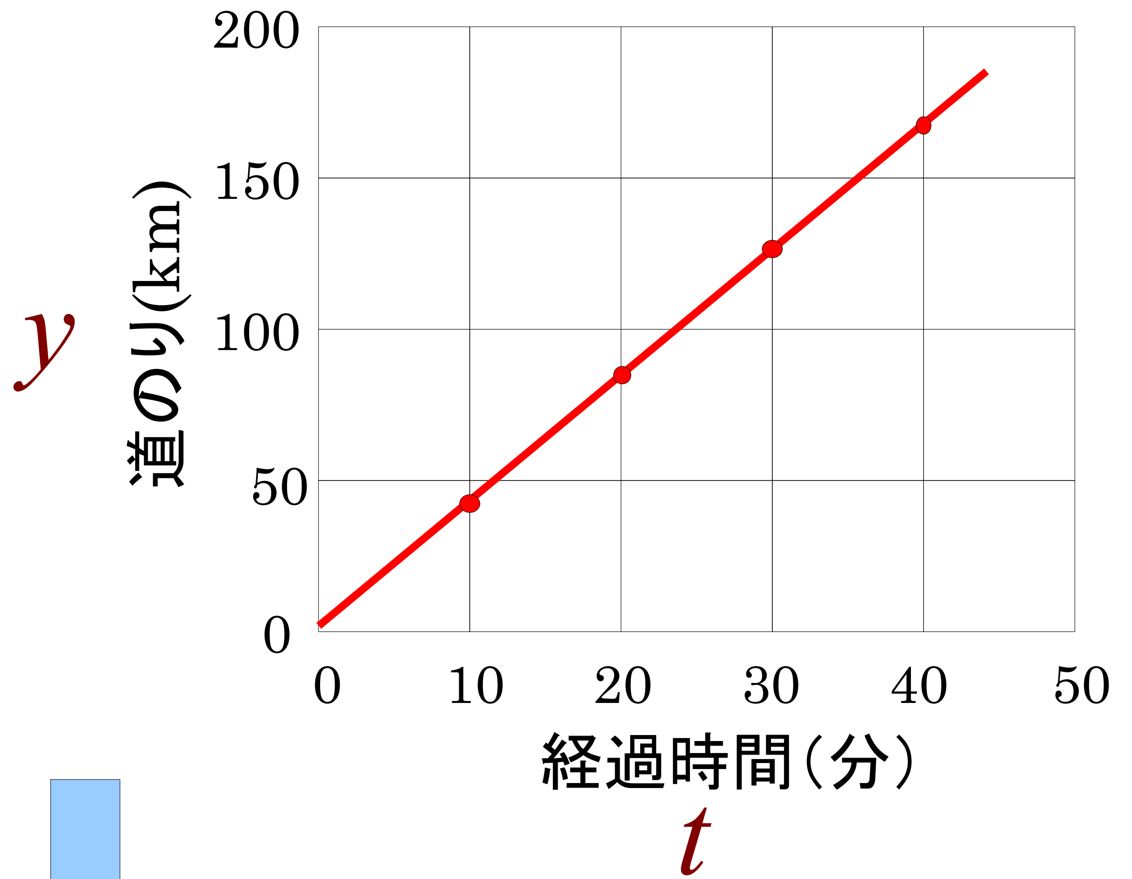
$$\text{時速} = \boxed{4.1 \times 60 = 246\ \text{km/時}}$$

$$\text{秒速} = \boxed{4.1 \div 60 = 0.068\ \text{km/秒}}$$

「時速」を知るためにホントに1時間走る必要はない

経過時間と道のりの関係（速さが4.1[km/分]の場合）

経過時間 t [分]	走った道のり y [km]
10	41
20	82
30	123
40	164



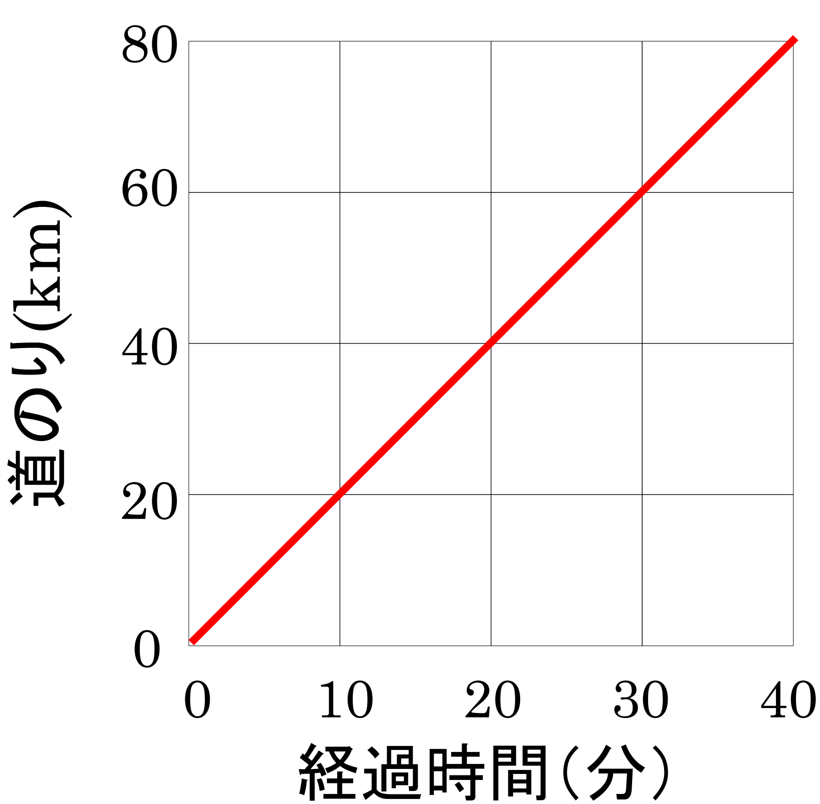
$$y = 4.1\,t$$

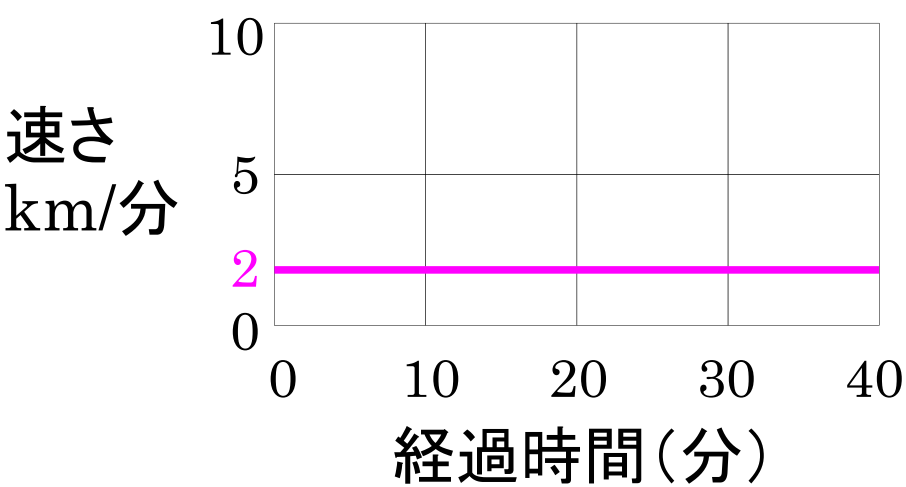
（ t に関する1次関数）

直線の傾き＝速さ

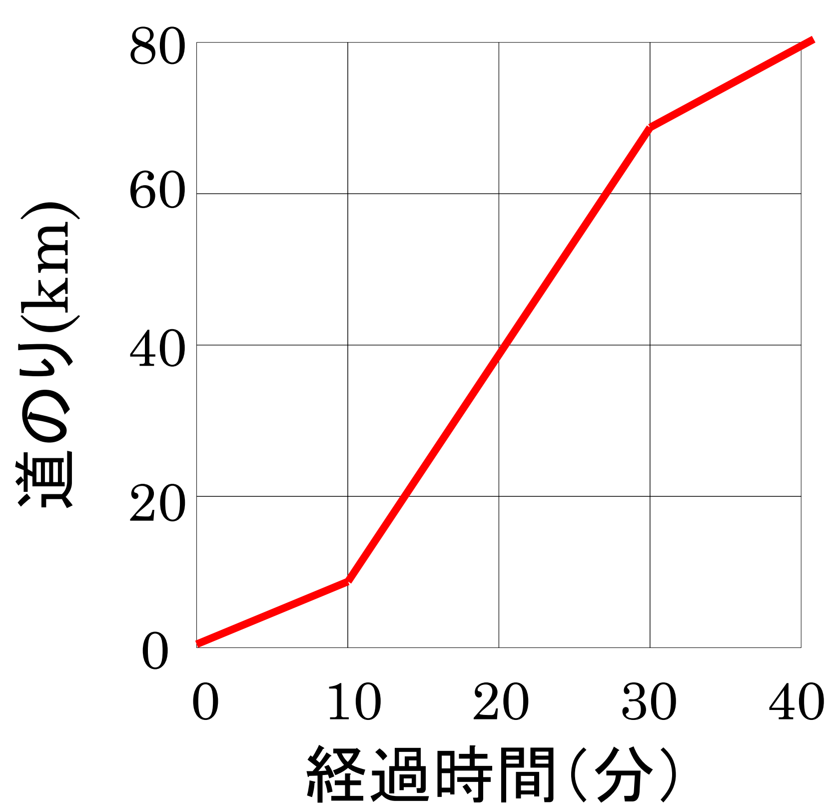
速さを知りたければ傾きを調べれば良い

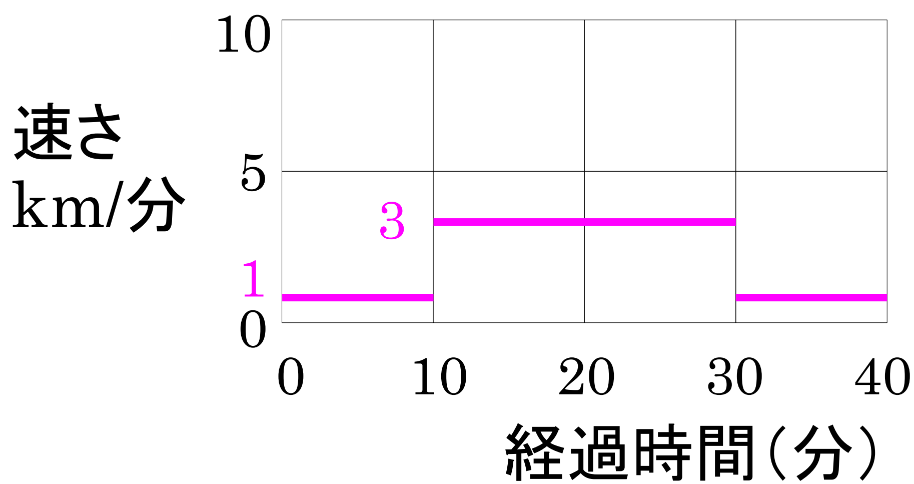
速さが2[km/分]の場合



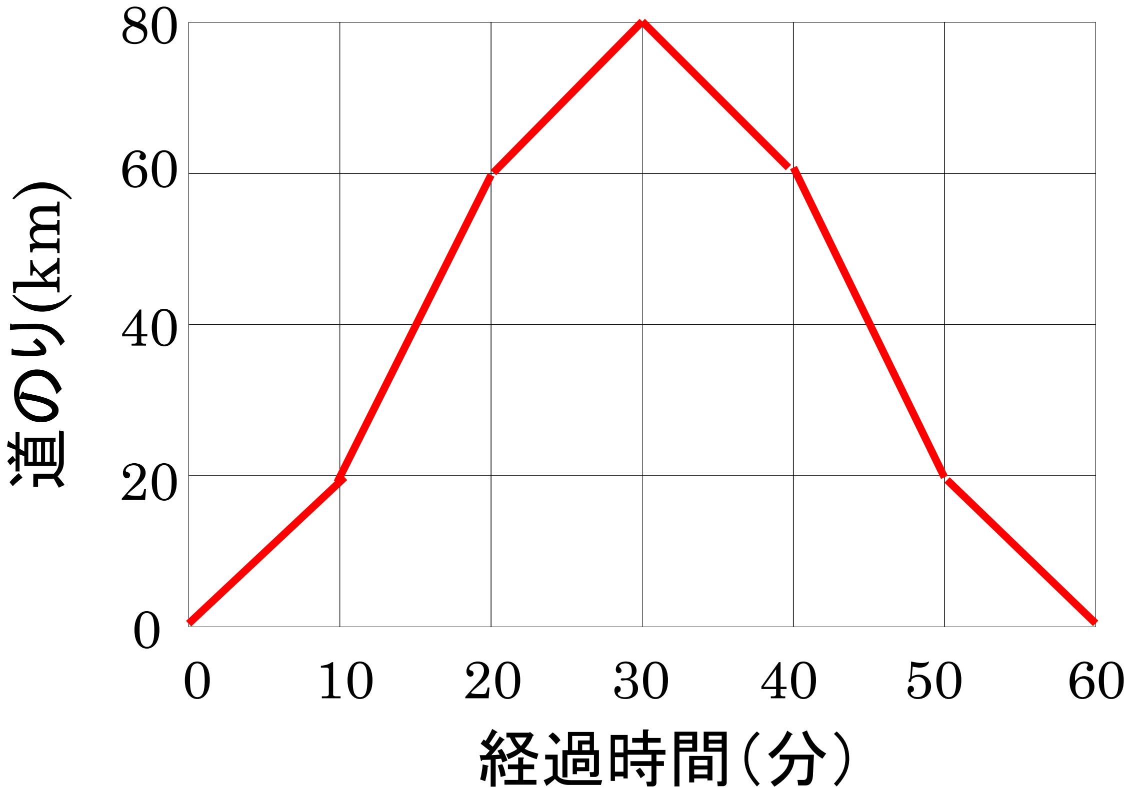


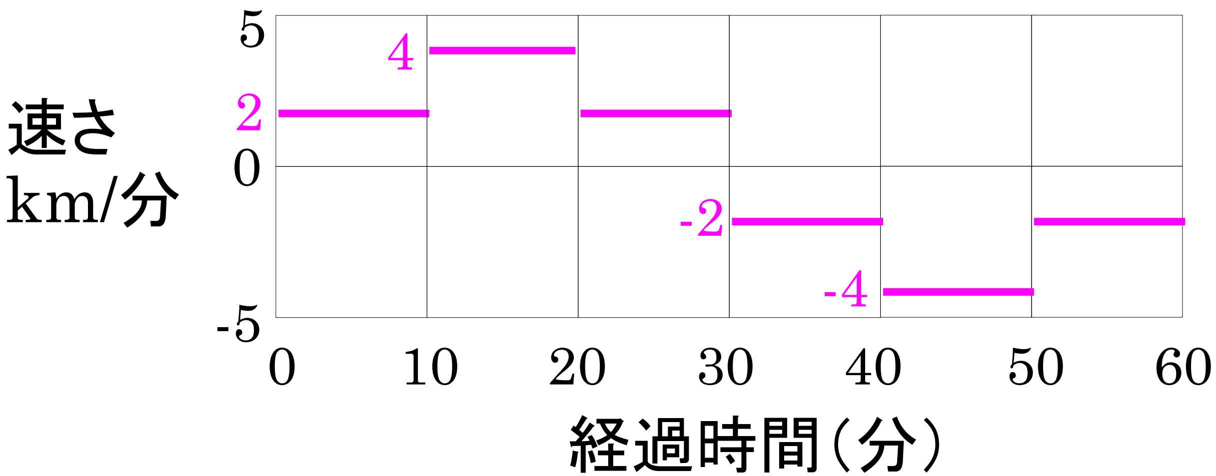
途中で速さが変わる場合



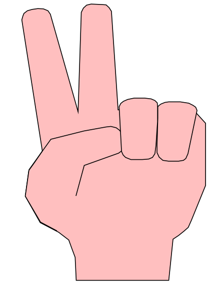


問題　速さはどのように変化しているでしょう？

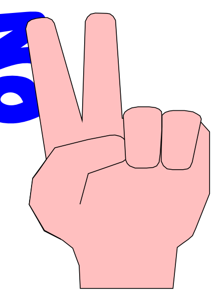




速さは
「時間‐道のり」グラフの傾き



「時間‐道のり」が折れ線や曲線になると，**速さも時間変化する**



「道のり-時間」が１次関数では表せないような場合について,考えてみよう.

その例として，２次関数の場合を取り上げ，ある時間t_Aにおける速さを求めてみよう

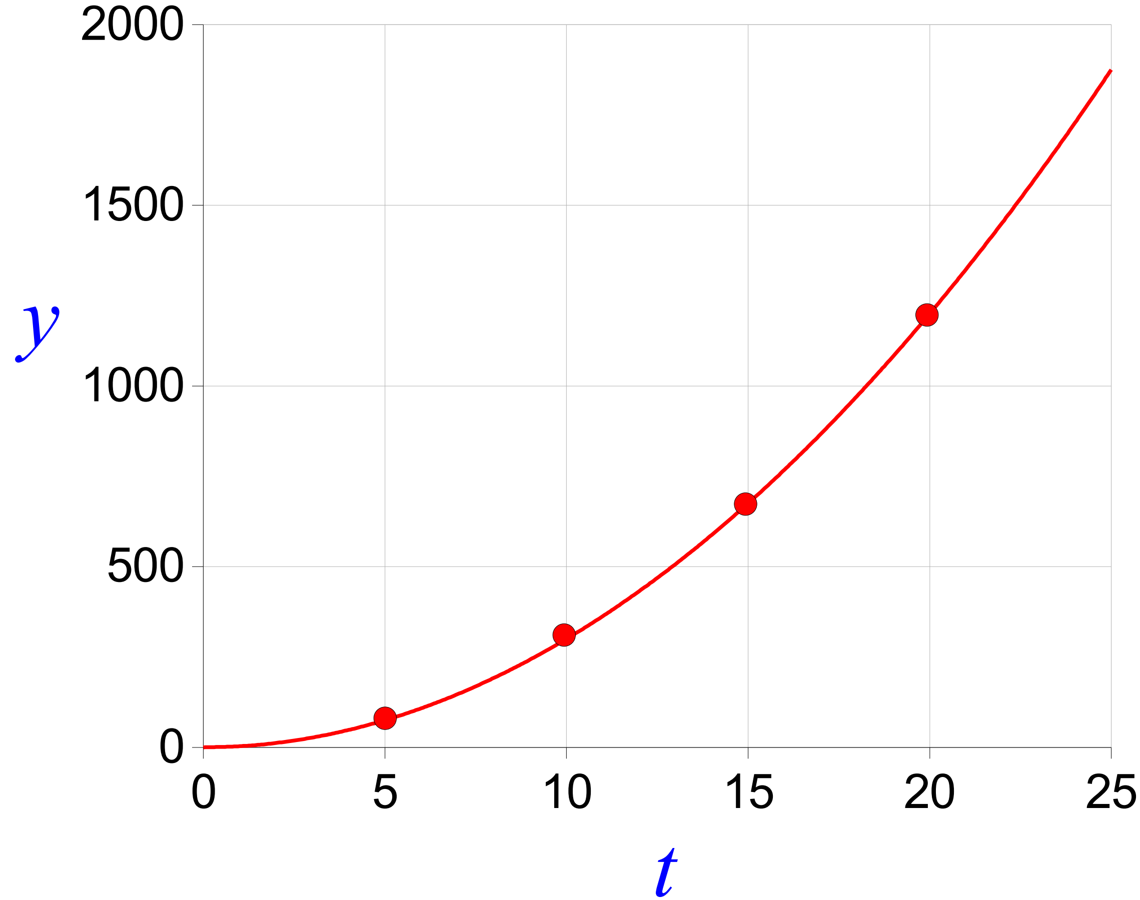
$$y = C\,t^2$$

(Cは任意定数)

2次関数の例

$$y = 3t^2$$

t	y
5	75
10	300
15	675
20	1200



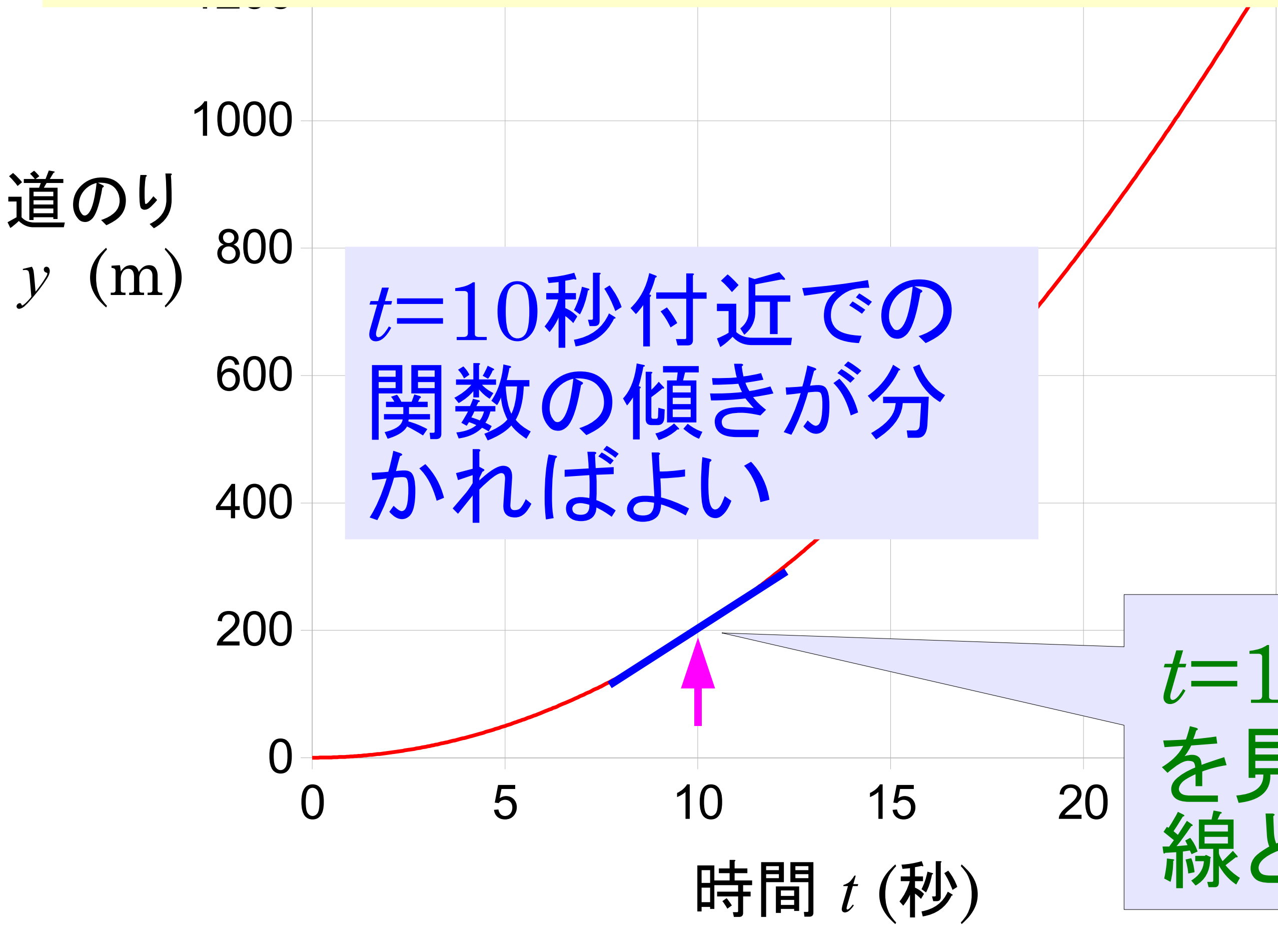
「傾き」をどう調べよう？

「時間-道のり」が２次関数のときはどうなるかな？

例えば，「t=10秒のときの速さ」はどうすれば求まるのだろう？

２次関数のとき

$$y=2t^2$$

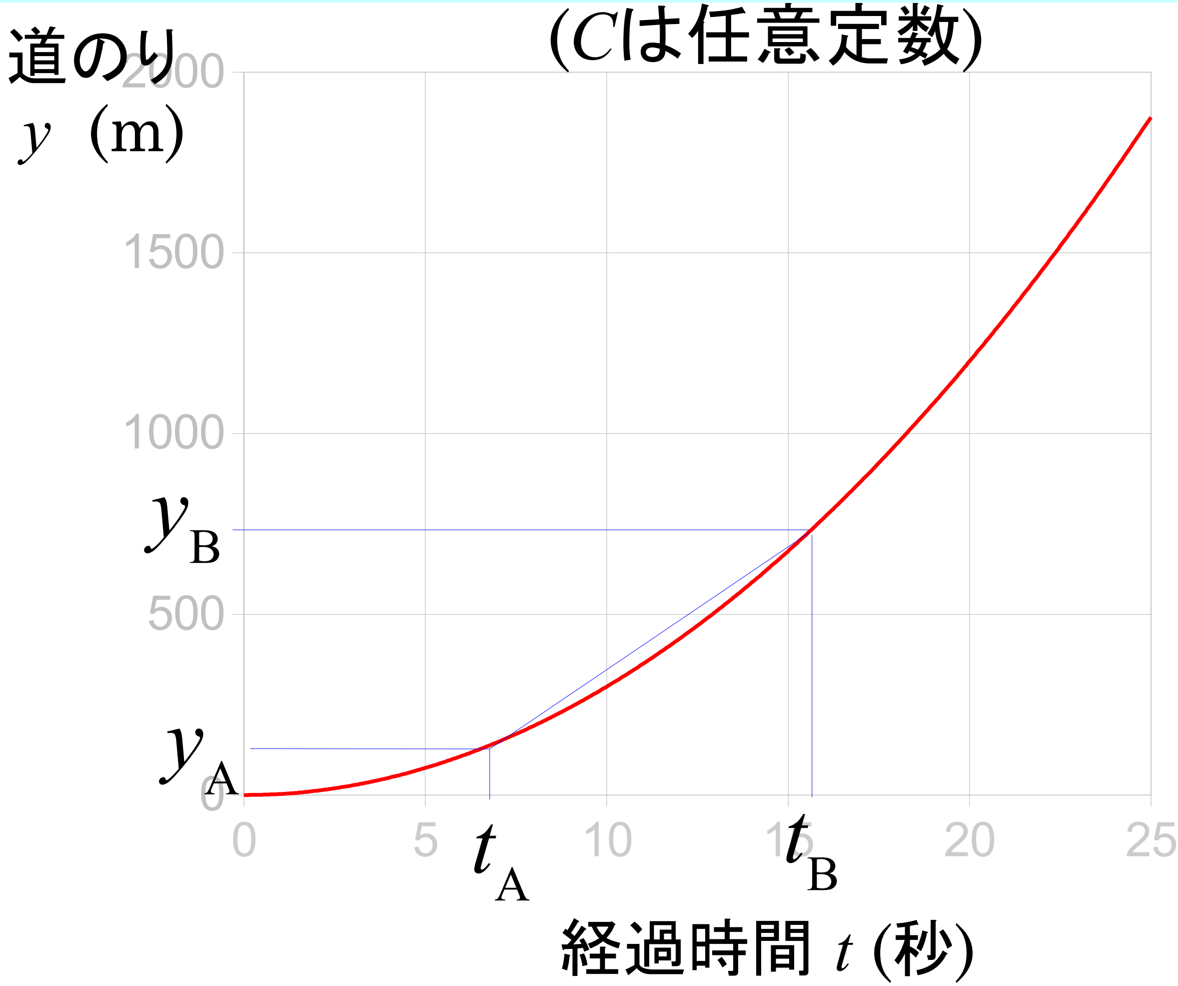


t=10秒付近での関数の傾きが分かればよい

t=10秒付近の狭い部分を見れば，だいたい直線とみなすことができる

例題1　$y = C\,t^2$ のときに，時間t_Aにおける速さ

(Cは任意定数)



速さ（直線の傾き）

平均変化率

$$V = \frac{y_B - y_A}{t_B - t_A}$$

$$= \frac{C\,t_B^{\,2} - C\,t_A^{\,2}}{t_B - t_A}$$

t_Aから少し離れた時間t_Bを考えて，

その間を平均の速さVを求めてみよう

そして t_Bを次第にt_Aに近づけていけば，ホントの速さが分かるはずだ

速さ $V=\dfrac{y_B-y_A}{t_B-t_A}=\dfrac{C\,t_B{}^2-C\,t_A{}^2}{t_B-t_A}$

t_Bをどんどんt_Aに近づけていくと速さV はどうなるかな？

ここで $t_B=t_A$を代入すると・・・

$$V=\frac{0}{0}$$

意味不明！
これはマズイ！

もう少しV の式を性質を調べて見ましょう.

$$V=\frac{C{t_B}^2-C{t_A}^2}{t_B-t_A}$$

$$=\frac{C({t_B}^2-{t_A}^2)}{t_B-t_A}$$

$$=\frac{C(t_B-t_A)(t_B+t_A)}{t_B-t_A}$$

$$=C(t_B+t_A)$$

公式

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$$

分子を因数分解すると

■成功の秘訣！■

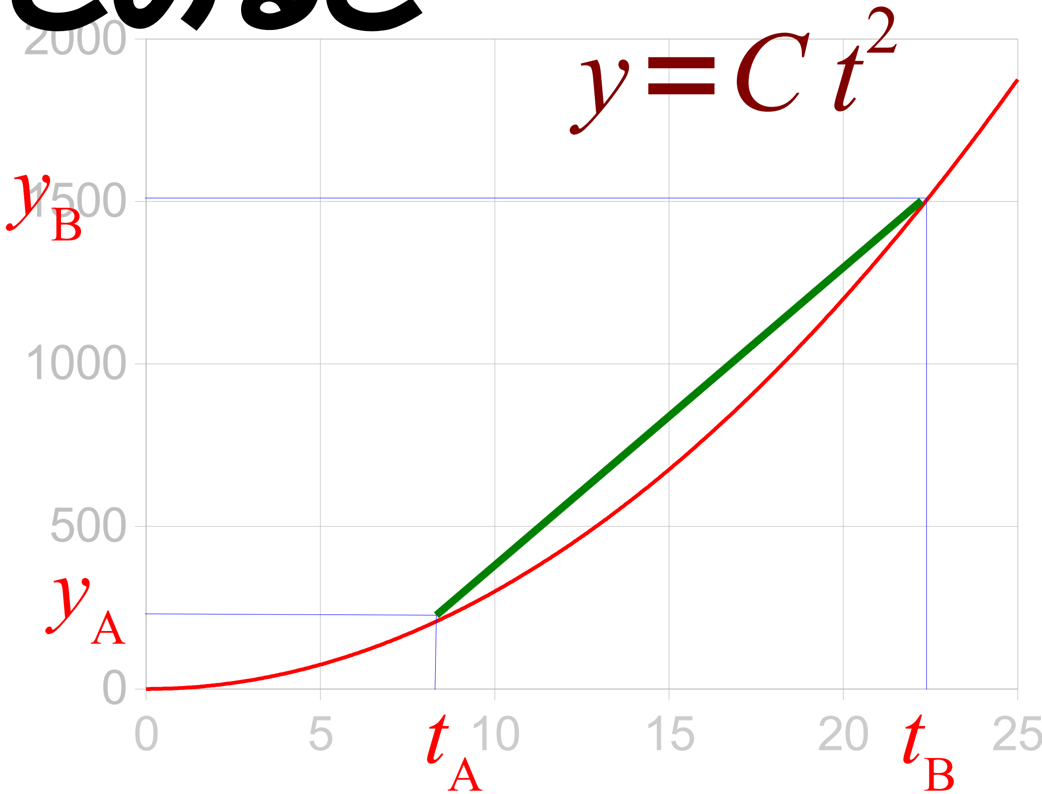
$t_B=t_A$ としたときにゼロになってしまう部分をうまく約分できた

ここで t_B が　t_A に近づくと･･･

$$V=C(t_B+t_A) \Rightarrow V=2Ct_A$$

（ここでは $t_B=t_A$ を代入しちゃったけど，おかしなことにならない）

まとめると



速さ（平均変化率）

$$V = \frac{y_B - y_A}{t_B - t_A}$$

$$= \frac{C\,t_B^{\,2} - C\,t_A^{\,2}}{t_B - t_A}$$

☑ t_B が t_A に近づけば,
速さ V (平均変化率)はどんどん $2Ct_A$
に近づいていく

$$\lim_{t_B \to t_A} V = 2\,C\,t_A$$

と書く

（注）lim はlimit (極限)という意味

結局、 $$\lim_{t_B \to t_A} V = \lim_{t_B \to t_A} \frac{y_B - y_A}{t_B - t_A} = 2Ct_A$$

時間 t_A における速さ v は t_A だけで決まる.

t_B の取り方にはよらない.

つまり, 時間 t_A における速さ v は

$$v = \lim_{t_B \to t_A} V = 2Ct_A$$

☑ $V=\dfrac{y_B-y_A}{t_B-t_A}$ として $\displaystyle\lim_{t_B\to t_A} V=2Ct_A$

を導いたが，この $\displaystyle\lim_{t_B\to t_A}\frac{y_B-y_A}{t_B-t_A}$ のことを

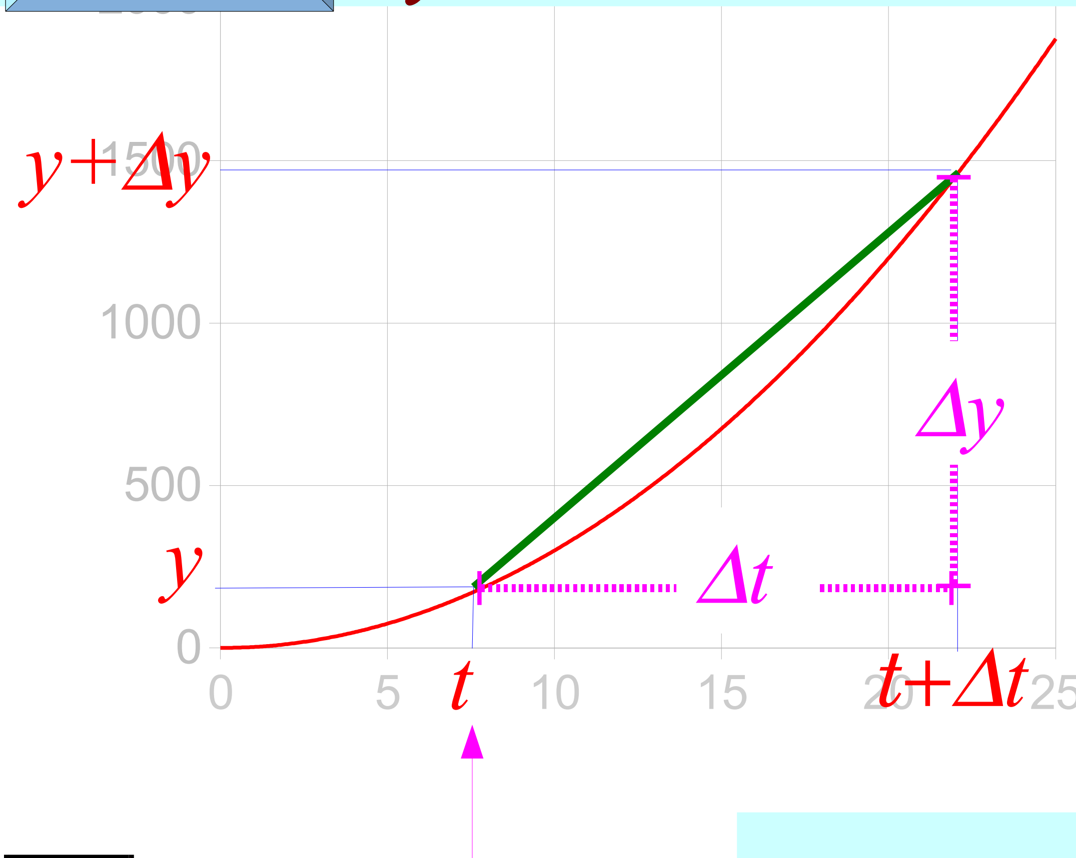
t_Aにおけるyの微分係数と言う.

☑ 道のり y の微分係数が速さ v に等しい.

（注） 微分係数という言葉は数学用語.
y, t が道のりと経過時間ではないような場合にも
使うことができる.

ここまでの結果を，
もう少し別の表現で
表してみましょう

例題2　$y = C\,t^2$ の場合.　少し表現を変えると・・・



平均の速さ
（直線の傾き）

$$V = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

☑ 時間tにおける速さv

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ を $\displaystyle \frac{dy}{dt}$ と書く.

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$y=Ct^2$ の場合．　具体的に計算してみると・・・・・

$$\begin{cases} y=Ct^2 \\ y+\Delta y=C(t+\Delta t)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= C(t+\Delta t)^2-Ct^2 \\ &= C[t^2+2t(\Delta t)+(\Delta t)^2]-Ct^2 \\ &= 2Ct(\Delta t)+C(\Delta t)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t}=2Ct+C(\Delta t)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 2Ct + C(\Delta t)$$ において $\Delta t \to 0$ にすると

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} [2Ct + C(\Delta t)] = 2Ct$$

つまり　$y = Ct^2$ のとき, $\boxed{\frac{dy}{dt} = 2Ct}$

yの微分係数 がtの関数として与えられているとき，
これを yの導関数 と言い，

$$\frac{dy}{dt}$$

と書く.

yの導関数を求めることを「yを微分する」と言う.

[例]　$y=5t^2$ の導関数は $\dfrac{dy}{dt}=10t$

また，$t=2$でのyの微分係数は $10\times2=20$

$\dfrac{dy}{dt}(2)=20$ あるいは $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=2}=20$ と書いても良い

繰り返すと

道のりyと時間tの関係が

$$y = C t^2$$

であるとき，速さvは

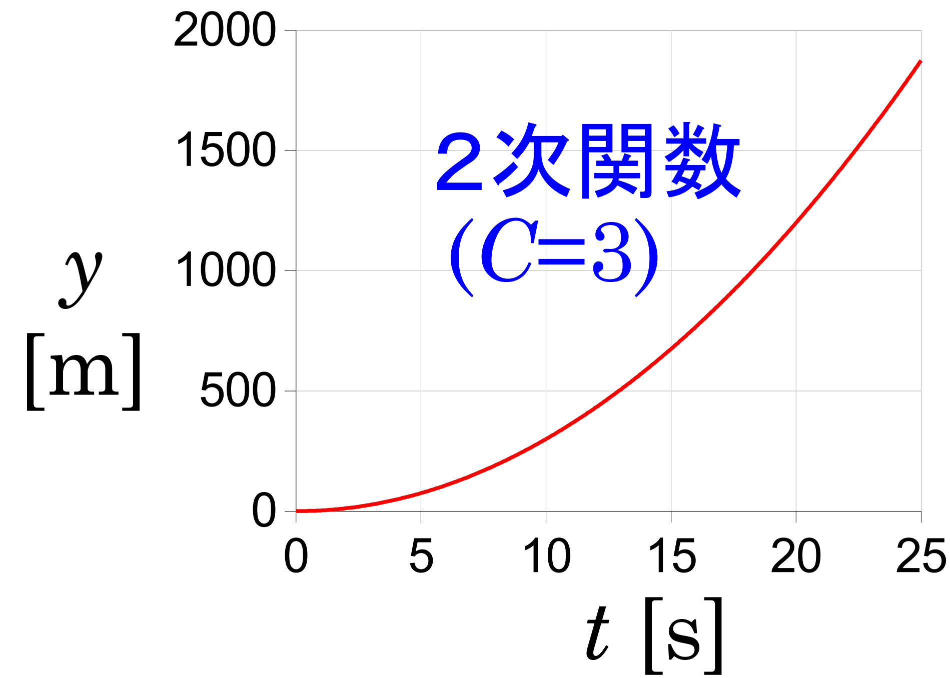
$$v = \frac{dy}{dt} = 2 C t$$

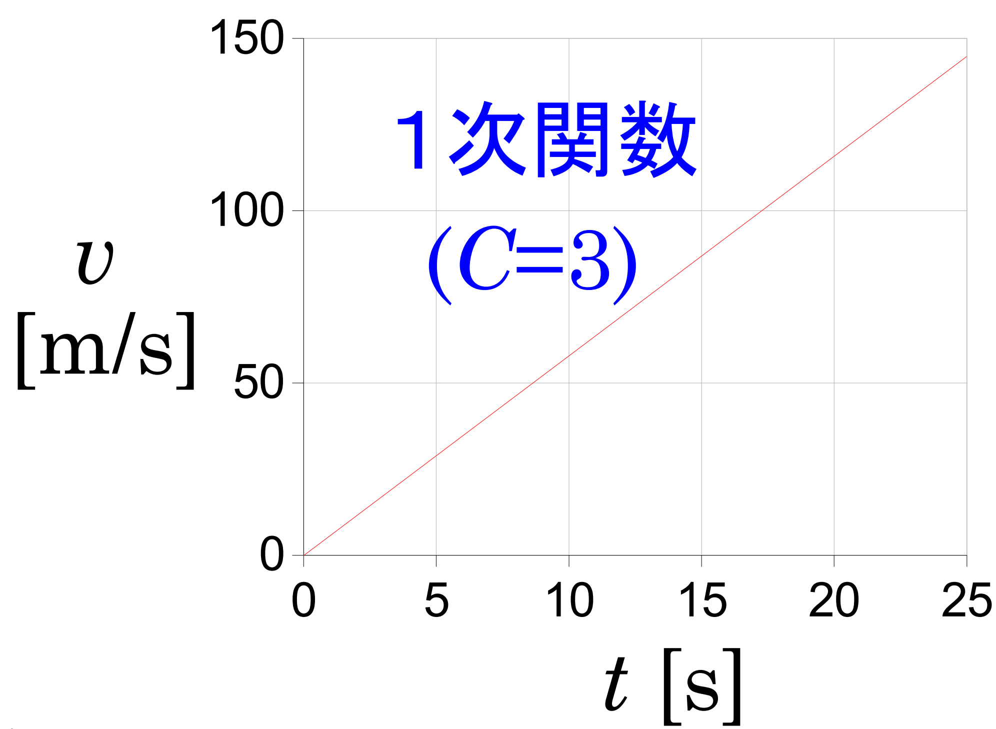
速さvの変化の割合は？

$$2C \ [\mathrm{m/s^2}]$$

v-tグラフの傾き

これを加速度という





加速度とは ⇒ 速さの変化の割合 $\dfrac{dv}{dt}$

速さvの導関数が加速度
(微分係数)

$v=\dfrac{dy}{dt}$ なので

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}v$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$
$$=\frac{d^2y}{dt^2}$$

yをtで２回微分するという意味

道のりyの２次導関数が加速度

道のり y [m]
時間　t [s]

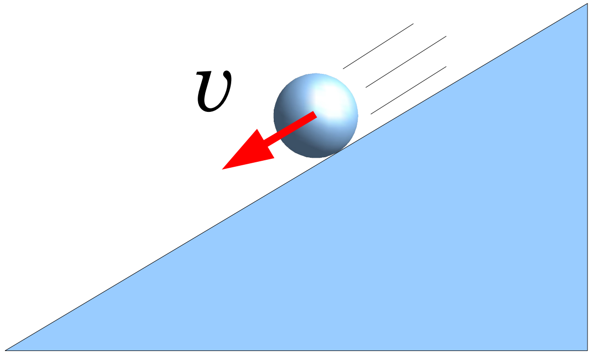
速さ v [m/s]

メートル毎秒

[s]は[second]，つまり[秒]

このとき，加速度は $[\mathrm{m/s^2}]$ の単位を持つ

[問題]



斜面に沿ってボールを転がしたところ，
ボールの速さv [m/s]は，経過時間t [s]の
関数として

$$v = 8t$$

であった.

(a) このボールの加速度 α はどれだけか？

$$a = \frac{dv}{dt} = 8 \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

加速度が一定の運動
（等加速度運動）

(b) このボールが転がった距離yをtの関数として求めてみよ.

$y = Ct^2$ のとき $v = \dfrac{dy}{dt} = 2Ct$

ここでC=4とすればこの問題の答.

あ～，疲れた！

食事が済んだら，さあ，再開だ～！

質問：これは某航空会社の機内食です．さて，どこの航空会社でしょう？
（これが分かる人は，相当海外旅行をしている人でしょう．）

答：　エール フランス

ここまでやってきた数学の話を物理学の話へ繋げて見ましょう.

ニュートンの力学

物体の運動の法則に関する日常経験

（１） 例えば，自転車に乗っている人の背中を手で軽く押せば自転車は簡単に走り出すが，同じぐらいの力で乗用車を押しても乗用車は動かない．

（２） あるいは，自転車に乗っている人の背中を手で押す場合でも，軽く押すか，強く押すかで自転車の加速の度合いが違う．

→ ニュートンの運動の第2法則

ニュートンの運動の第2法則

（力）＝（質量）×（加速度）

$$F = ma$$ （高校物理）

$$F = m\frac{dv}{dt}$$ （大学物理）

力 → 加速度

（原因）　（結果）

因果法則

ニュートンは，物体に働く力と物体の加速度の間に比例関係があることを発見した．その比例定数が質量である．（正確には慣性質量という）

この法則は，私たちの世界の力学的運動を支配する基本法則．

力Fを受けてこの物体がどのような運動をするかは，この方程式を満たす関数vを求めることで調べることができる

さらに，位置（あるいは道のり）をyとするなら，

$$v = \frac{dy}{dt}$$

の関係を利用して位置yを時間tの関数として求めること．

（力）＝（質量）×（加速度）

$$F = m\,a$$ （高校物理）

力Fにより質量1[kg]の物体が加速度1[m/s^2]で加速されているとき,その力Fの大きさは1[N]である.

単位は「ニュートン」

運動の第2法則について単位だけ見比べるなら

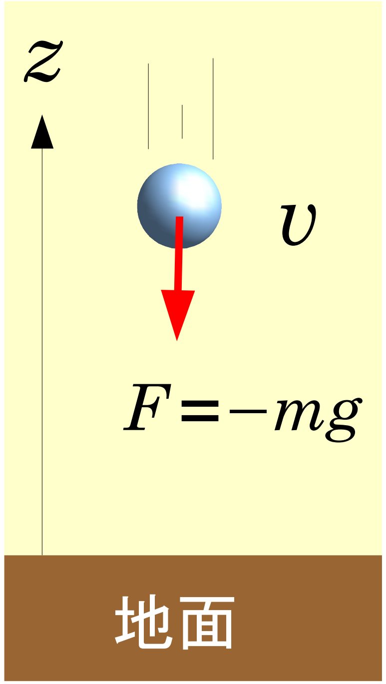
[N] = [kg]・[m/s^2]

という関係があります. すなわち

1 [N]= 1 [kg・m/s^2]

という関係があります.

自然落下する物体



ニュートンは物体の間には**万有引力**が働くことを発見した.

地球表面上にある質量mの物体と地球との間にも万有引力Fが働く.
その力Fは, **地表近くにある物体の場合**,次の式で与えられる.

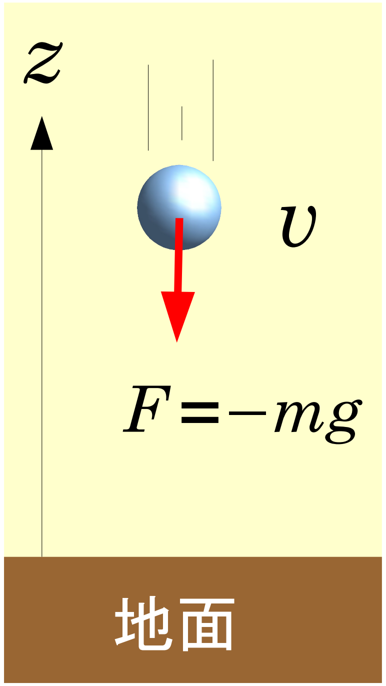
$$\text{重力} \quad F = -mg$$

この符号は, 左の図のように, 上向きに座標軸を取った場合に,力が下向きであることを表現する

重力加速度という
g=9.8[m/s^2]

[Q] 1kgの物体にはたらく重力の大きさは？

自然落下する物体



運動の第2法則　$F=m\dfrac{dv}{dt}$

重力　$F=-mg$

重力加速度　g=9.8[m/s^2]

二つの式を組み合わせると

$$m\frac{dv}{dt}=-mg$$

この方程式により物体の運動が記述されるので,運動方程式という.
この運動方程式を満たす関数vを求めることを「運動方程式を解く」という.

この方程式は, 関数vの微分を含んだ方程式なので,数学的には微分方程式ということもできる. この微分方程式を満たす関数vを求めることを「微分方程式を解く」という.

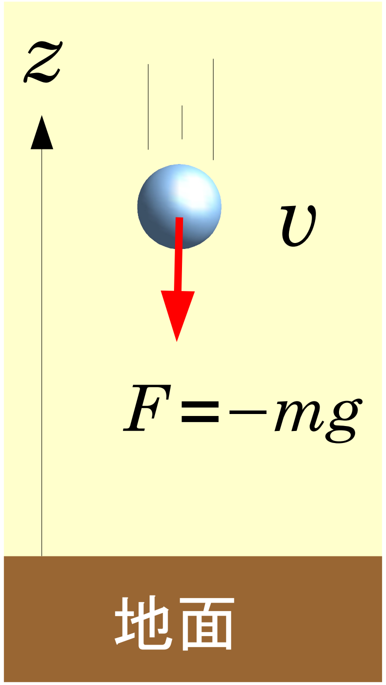
ボールの位置座標zとボールの速度vとは

$$v = \frac{dz}{dt}$$

の関係があるので，前ページの運動方程式は

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -mg$$

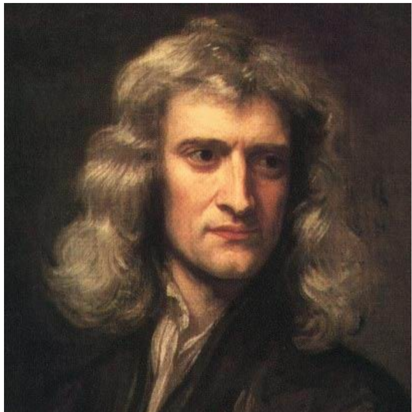
と書くこともできる．zの2次導関数を含んだ微分方程式になっている．



重力加速度gにより自由落下するボールの場合であれば，このニュートンの運動方程式を解くことにより，任意の時刻 t における落下速度 $v(t)$, 位置 $z(t)$ を厳密に求めることができる.

Newton力学

$$\frac{d}{dt}(mv)=F$$

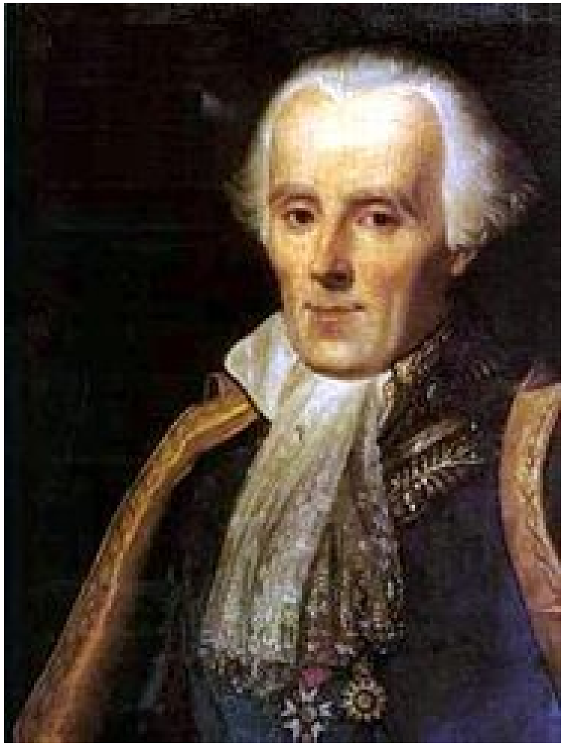

Sir I. Newton
(1642-1727)

「自然哲学の数学的諸原理(プリンキピア)」(1687)に運動の3法則が書かれている．　この本が発表されたのは40才を過ぎてからのことであるが，この3法則は20才過ぎの頃に既に完成していた．

日本では,1687年に将軍綱吉が「生類憐れみの令」を出しています．
あの有名なバッハ(J. S. Bach,(1685-1750)が2歳のころです．

このニュートンの運動方程式は物体の位置座標の時間発展を完全に記述する

→ 決定論的方程式です．
（物体の位置座標の時間変化を曖昧さなく決定してしまう方程式ということ）



ピエール＝シモン･ラプラス
(1749-1827)

数学者でした.
フランス革命が1789年.
ベートーヴェンやモーツァルトの時代に
生きた人です.

（注） ニュートン （1642-1727）
徳川吉宗 （1684-1751）
ベートーベン (1770-1827)

ラプラス『確率の解析的理論』(1812年)

(ちなみに「のだめカンタービレ」で有名になった
ベートーヴェンの交響曲第7番の初演はこの翌年
でした．)

もしもある瞬間における全ての物質の力学的状態と
力を知ることができ、かつ，もしもそれらのデータを
解析できるだけの能力の知性が存在するとすれば、
この知性にとっては、不確実なことは何もなくなり、
その目には未来も(過去同様に)全て見えているで
あろう。

後で **ラプラスの悪魔**
と呼ばれるようになった

万有引力

質量Mの物体と質量mの物体の距離がrのとき,
物体間にはたらく力Fの大きさは

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

万有引力定数

G=6.67×10^{-11} [m^{3}s^{-2}kg^{-1}]

（注）$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

問題　体重30kgの子供二人が1m離れて座っている.
二人の間にはたらく万有引力を求めよ

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$G = 6.67\times10^{-11}\ [\mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}]$$
$$r = 1\ [\mathrm{m}]$$
$$M = m = 30\ [\mathrm{kg}]$$

$$F = 6.67\times10^{-11}\times\frac{30\times30}{1\times1} = 6.02\times10^{-8}\ \ [\mathrm{N}]$$

問題　地球表面上にある物体が感じる重力加速度gを求めよ

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = mg$$

G=6.67×10^{-11} [m^{3}s^{-2}kg^{-1}]
r=6380km
M=5.97×10^{24}[kg]

$$g = G\frac{M}{r^2} = \frac{6.67\times 5.97}{6.38\times 6.38}\times 10^{-11+24-12} = 9.78 \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

問題　高度h=620kmで飛行するスペースシャトルが感じる重力加速度を求めよ

周回軌道高度：185〜963 km

$$g = G\frac{M}{(r+h)^2}$$

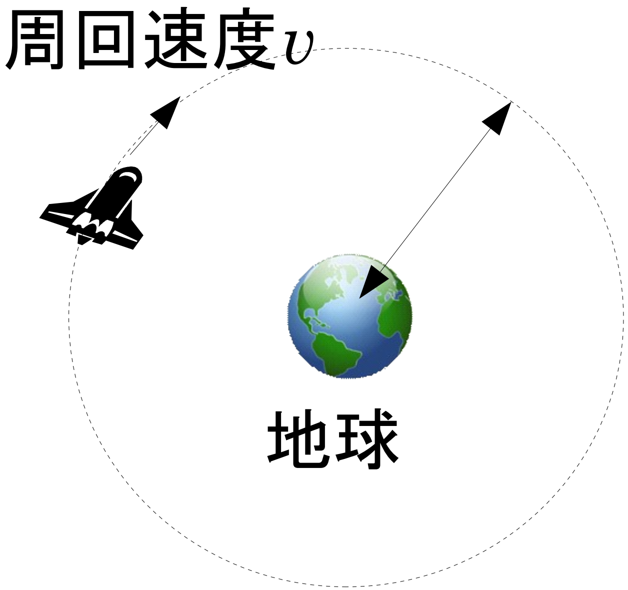
$$= \frac{6.67\times 5.97}{7\times 7}\times 10^{-11+24-12} = 8.12 \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

と，いうことは

地球を周回するスペースシャトルの中は**無重力ではない**

地球を周回するスペースシャトル
「実は落ち続けている！」

地球を周回するスペースシャトルは落ち続けている！



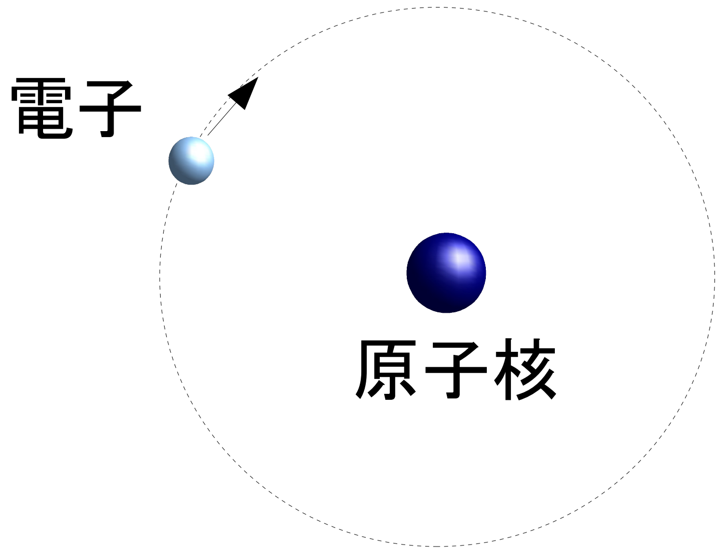
ニュートンの第１法則
物体に対して力が働かなければ，物体は静止，もしくは等速直線運動をする．
（慣性の法則）

スペースシャトルは地球の重力のために運動の向きを刻々と変化させている
（等速直線運動ではない）

⇒ 落ち続けるが故に，
回転運動をしている

加速度運動

原子核を周回する電子も落ち続けている！



原子核を周回する電子はクーロン力（静電力）を受けて落ち続けている.

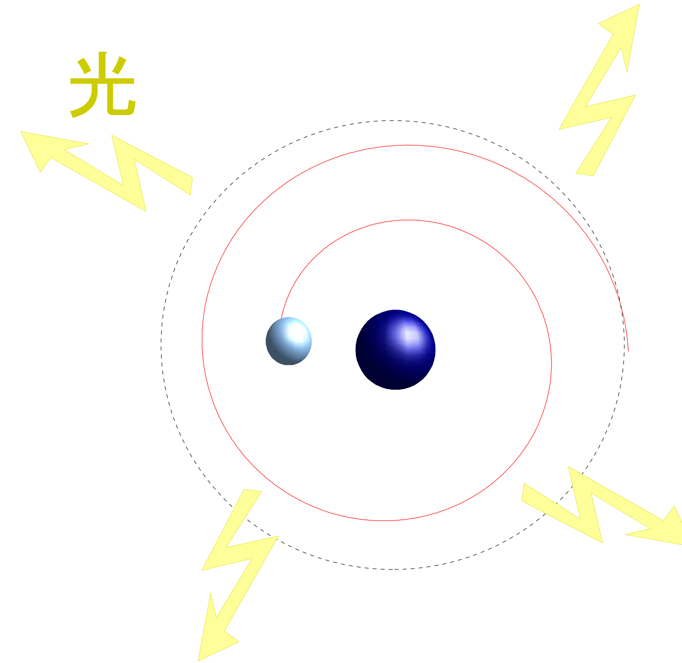
[Quiz] 原子核の直径が1cmぐらいだとしたら，電子の軌道半径はどれくらいでしょう？

放射減衰

マックスウェル電磁気学によれば，
一般に，荷電粒子が加速度運動を行う場合，電磁波を放出する．

（注）荷電粒子=電気を帯びた粒子

応用例：送信用アンテナなど



荷電粒子は運動エネルギーを失い，
軌道半径が小さくなっていく．

太陽系型原子模型は
10^{-11}秒の寿命で崩壊してしまう．

原子が安定に存在する事実を
まったく説明できない！！！

原子の軌道半径は
どのようにして決まっているのか？

古典力学（ニュートン力学），
古典電磁気学（マックスウェル電磁気学）
とは別に**新しい基本法則**があるの
だろうか？

19世紀末，

実は，物理学者は
失業寸前

と思われていた．

「いくつか解決していない問題は残されているが，もう物理学者の仕事は事実上尽きた」

と，ほとんどの楽観的な人たち（実は凡庸な人たち）は考えていた．

そして，changeは20世紀初めに起きた！

私が生まれるずっと前の話だ！

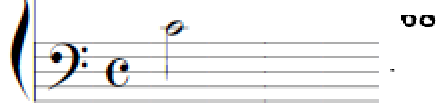




Prélude N°1

BWV 846

J.S. Bach (1685 - 1750)



ДЕСЯТЬ ЛЕГКИХ ПЬЕС

(1908г.)

10 Easy Pieces, Sz.39
(Bartók, Béla, 1881-1945)

Посвящение

今日は
ここまで