関数と微分　　原田

2008年10月 11, 18日

1. 微分
   物理量 y は位置座標 x や時間 t を決めると、その物理量の値は決定出来る。このように、ある変数 x の値が定まると他の変数 y が決められる時、数学では y は x の関数であるといい、$y = f(x)$ と書く。物理量を表す関数は特別な点を除き、連続である。

   さて、y と x がこのような関数関係にある場合を考えよう。今、x がごくわずか Δx だけ変化し、$x + \Delta x$ となった時、$y = f(x)$ はどのように振舞うかを知りたい。上の定義を用いれば、その変化は $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ となる。Δx が微少であり、$\Delta x \to 0$ を満たす時、$\Delta f \to 0$ となる。その時

   $$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \cong f^{'}(x)\Delta x, \tag{1}$$

   と書ける。$f^{'}(x)$ は $\Delta x \to 0$ の極限で次式により与えられ

   $$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, & (2) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, & (3) \\ &\equiv \frac{df}{dx}, & (4) \end{aligned}$$

   これを関数 $f(x)$ の導関数と呼ぶ。

2. 関数の展開
   一般に関数 $f(x + \Delta x)$ を Δx について展開することを考えよう。
   $(x + \Delta x)^2, (x + \Delta x)^3, (x + \Delta x)^\alpha$
   $\frac{1}{1-x} = (1 - x)^{-1}$
   $(x + \Delta x)^\alpha = x^\alpha\{1 + \frac{\alpha}{1!}(\Delta x/x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(\Delta x/x)^2 \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(\Delta x/x)^n + \cdots\}$

   問題１　さまざまな A についてのグラフを考えよう：
   $y = Ax^2 + x^4$

   問題２　多項式の展開を考え，それらを Δx の冪に整理しよう：
   $3(x + \Delta x) + 1$
   $5(x + \Delta x)^2 + 6(x + \Delta x) + 10$
   $(x + \Delta x)^3 + 4(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 1$

3. テーラー展開
何回でも微分可能な関数 $f(x)$ に対して、次のテーラー展開が導かれる：

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x)(\Delta x)^3+\cdots \quad (5)\\ &+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\Delta x)^n+\cdots, \quad (6)\end{aligned}$$

問題 2 での展開式（Δx の冪に整理）と上のテーラー展開式とを見比べて、関数の微分が Δx の冪の係数として現れていることを確かめよ。

展開の例：

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad (7)\\ \exp(ix) &= \cos x+i\sin x \quad (8)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} \quad (9)\\ &+ i(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}). \quad (10)\\ \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \quad (11)\end{aligned}$$

4. 微分方程式
ある時間 t_0 における位置座標 x や速度 $\vec{v}$ を決めると、それ以後すべての時間の質点の位置座標 x や速度 $\vec{v}$ が予言できる。（微分方程式）

(a) 質点の自由落下

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F=mg. \quad (12)$$

(b) 圧力と高さの関係

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= -\rho g, \quad (13)\\ \rho &= m/V=p\mu/RT. \quad (14)\end{aligned}$$