数について　　定義と公理

藤田　八洲彦

等号　$=$　についての公理

1. $a = a$　　　反射の法則
2. $a = b$ ならば $b = a$　　　対称の法則
3. $a = b$, $b = c$ ならば　$a = c$　　　推移の法則
4. $a = b$　ならば $a + c = b + c$
5. $a = b$　ならば　$c \times a = c \times b$　　$(ca = cb)$

加法、乗法の公理

1. $a + b = b + a$　　　加法の交換法則
2. $ab = ba$　　$a \times b = b \times a$　　　乗法の交換法則
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$　　　加法の結合法則
4. $a(bc) = (ab)c$　　$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$　　　乗法の結合法則
5. $a(b + c) = ab + ac$　　$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$　　　分配法則

自然数は加法・乗法に関して閉じている。(代数的構造)
自然数には大小がある。(順序的構造)
自然数は離散的である。(位相的構造)

自然数の公理　　　自然数の集合を N と表す.

1. $N \ni a, N \ni b \Rightarrow N \ni a + b$
   a が自然数, b が自然数ならば $a + b$ は自然数である.
2. $N \ni a, N \ni b \Rightarrow N \ni a \times b$
   a が自然数, b が自然数ならば $a \times b$ は自然数である.
3. $N \ni 1; 1 \times a = a \times 1 = a, a \in N$
   $1 \times a = a \times 1 = a$ となる 1 は自然数である.

減法, 除法の定義

1. $x + b = a$ となる数 x を　$a - b$　と表す。
2. $ax = b(a \neq 0)$　となる数 x を $\frac{b}{a}$ と表す。
3. $x + a = a$ となる数 x を 0　と表し、加法の単位元という。
4. $x + a = 0$ となる数 x を加法の逆元という。
5. $ax = a$ $(a \neq 0)$ なる x を 1 で表し乗法の単位元という。
6. $ax = 1$　となる x を $\frac{1}{a}$ で表し乗法に関する逆元という。

整数の公理　　整数の集合を I と表す.0

1. 整数は加法、乗法、減法に関しては閉じているが、除法に関しては閉じていない。
2. $I \ni a, I \ni b \Rightarrow I \ni a + b$
3. $I \ni a, I \ni b \Rightarrow I \ni a \times b$
4. 整数の範囲には、加法の単位元、逆元および乗法の単位元は存在するが, 乗法の逆元は存在しない。

5. $I \ni 0; 0 + a = a + 0 = a, a \in I$
6. $I \ni -a; (-a) + a = a + (-a) = 0, a \in I$
7. $I \ni 1; 1 \times a = a \times 1 = a, a \in I$
8. 整数には大小関係がある。
9. 整数は離散的である。

有理数

1. 有理数は加法、乗法、減法、除法に関しては閉じている。
   ただし, 0 による除法は除く.
2. 有理数の範囲には、加法、乗法の単位元、逆元およびの単位元は存在する。
3. 有理数には大小関係がある。
4. 有理数はどんな狭い区間にも存在する。

実数　数直線を埋め尽くしている。

1. 整数
2. 有限小数
3. 循環する無限小数
4. 循環しない無限小数

無理数の定義 0 および, 正または負の整数, 有限小数, 無限小数の形で表される数を, 実数という.
実数のうち有理数でない数を無理数という.

複素数の定義

1. 負の数の平方根を虚数という
2. -1 の平方根の一つを 虚数単位とよび i で表す.
3. a, b を実数とするとき　$a + bi$　の形で表されるものを複素数という.

1. 複素数は加法、乗法、減法、除法に関しては閉じている。
   ただし, 0 による除法は除く.
2. 複素数には大小が決められない。
3. 複素数は複素平面をうずめつくす。

計算練習

$x^3 = 1$

$x^3 = -1$

$x^4 = -1$

指数の定義

$\underbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}} = a^n$

指数の計算

$a^n \times a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{ 個}} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}} = a^{m+n}$

$$a^n \div a^m = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}}} = a^{m-n}$$

$$(a^n)^m = \underbrace{(a^n) \times (a^n) \times \cdots \times (a^n)}_{m\text{ 個}} = a^{\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m\text{ 個}}} = a^{mn}$$

$$a^n \div a^n = \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}}} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

指数を負の数まで拡張する。

$$1 \div a^m = a^0 \div a^m = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m\text{ 個}}} = \frac{1}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$$

累乗根

指数を分数まで拡張する。 $(a^{\frac{1}{m}})$ を m 乗すると a になる.

$(a^{\frac{1}{m}})^m = a^{\frac{1}{m}m} = a^1 = a$　　　a の n 乗根は $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

指数関数

指数を実数まで拡張する。

$y = a^x$

$a = 2$ のとき

y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
x	-3	-2	-1	0	1	2	3

$a = 1$ のとき

y							
x	-3	-2	-1	0	1	2	3

$a = 1/2$ のとき

y							
x	-3	-2	-1	0	1	2	3

$a = -1$ のとき

y							
x	-3	-2	-1	0	1	2	3

対数関数

$y=x^2 \longmapsto x=\sqrt{y}$ のように $y=a^x \longmapsto x=\log_a y$ と書き表す。

$y_1=a^{x_1}$ のとき $x_1=\log_a y_1$

$y_2=a^{x_2}$ のとき $x_2=\log_a y_2$ となる.

$y_1\,y_2=a^{x_1+x_2}$ $\qquad x_1+x_2=\log_a y_1\,y_2=\log_a y_1+\log_a y_2$

$\dfrac{y_1}{y_2}=a^{x_1-x_2}$ $\qquad x_1-x_2=\log_a \dfrac{y_1}{y_2}=\log_a y_1-\log_a y_2$

$y_1^n=(a^{x_1})^n=a^{nx_1}$

$nx_1=\log_a y_1^n=n\log_a y_1$

特に $a=10$ のとき常用対数といい良く使われる。このとき $\log_{10}A$ の 10 を略して $\log A$ と書くことが多い。この値は対数表でしめされる。

また $a=e$ のとき自然対数とよび物理等ではよく使われる。このとき $\ln A$ と書く。

$e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$

対数関数の計算

例

$2^3=8 \iff 3=\log_2 8$

$2^1=2 \iff 1=\log_2 2$

$2^0=1 \iff 0=\log_2 1$

$2^{-3}=\dfrac{1}{8} \iff -3=\log_2 \dfrac{1}{8}$

$\log_a X=[frac\log_b X\log_b a$

次の値を求めよ。

$\log_2 16$ $\qquad \log_{10}1000$ $\qquad \log_{10}0.001$

常用対数

$y=10^x \iff x=\log y$

$\log 1=0$

$\log 2=0.3010$

$\log 3=0.4771$

$\log 7=0.8451$

$\log 20=\log 2\times 10=\log 2+\log 10=0.301+1=1.301$

$\log 2^{10}=10\log 2=10\cdot 0.3010=3.010=3+0.010=\log 10^3*A$

$\log A=0.010 \iff A\fallingdotseq 1.02$

$2^{10}\fallingdotseq 1.02\times 10^3$

$2^{10}=1024$

例 1

放射能を持つ物質は放射線を放出しながらその原子核が変化していく。このとき変化する割合を半減期で示す。

半減期とは物質の量が半分になる時間で表す。

最初 M_0kg のラジウムがあると 1590 年ごとに半分になる。

300 年後に残っているラジウムの量 Mkg は

$M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{T}{1590}\right)}$

と示される。

例 1

20 分に一度細胞分裂してその数が 2 倍になるバクテリアは 1 日たつと何倍になるか。

$2^{\left(\frac{24 \cdot 60}{20}\right)}$

不思議な数 ネピア数　と関数 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$　　　e^x

$(1+a)^n = 1 + na + \cdots {}_n\mathrm{C}_k a^k + \cdots$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$ となる関数を　$y = e^x \equiv \exp(x)$ と書く

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a_1 + a_2 2x^1 + a_3 3x^2 + \cdots + a_n n x^{n-1} + a_{n+1}(n+1)x^n + \cdots$$

$$y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

だから $a_0 = a_1,\quad a_1 = 2a_2,\quad a_2 = 3a_3, \cdots a_n = a_{n+1}(n+1)$
また $\exp(0) = 1$ だから $a_0 = 1$

$na_n = a_{n-1}\quad (n-1)a_{n-1} = a_{n-2}$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} = \cdots = \frac{a_1}{n!}$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

オイラーの公式
$\exp(ix) = \cos x + i\sin x$