弦の振動
（振動を数値計算で調べてみよう。）

指数的な緩和 たとえば、放射性元素の半減期

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

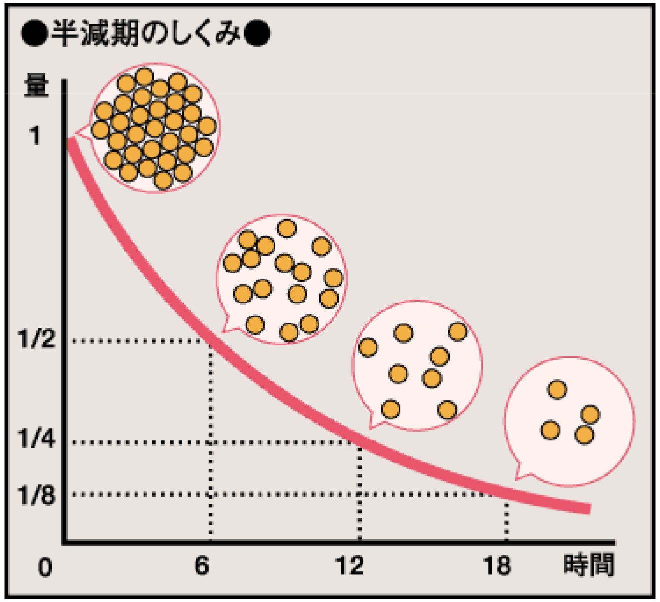
同じ放射性核種であれば、すべての原子核がある時間内に崩壊する確率は等しい。多くの原子核の集まりを考えると、単位時間に減少する原子核の数は、そのときの原子核数に比例する。

この微分方程式の解、は指数関数。

N_0をt＝0での数とすると

$$N_t = N_0 \exp(-\lambda t)$$

NがN$_0$の１／２になるまでの時間が半減期



Nの時間変化を近似してみる

$$f^{/}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

*h*がある程度小さな有限の時間と考えて良いとすると、

$$f(t+h) = f(t) + f^{/}(t) \cdot h$$

（テーラー展開）

t=0　での初期値と微分変化量が分かっていれば、*t*＝*h*での値が分かる。

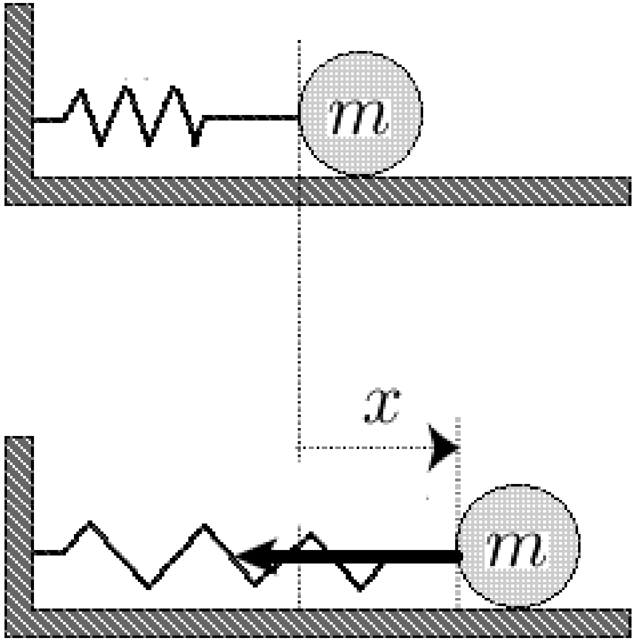
t＝*h*　での値と微分変化量が分かれば、*t*＝*h*+*h*での値が分かる。

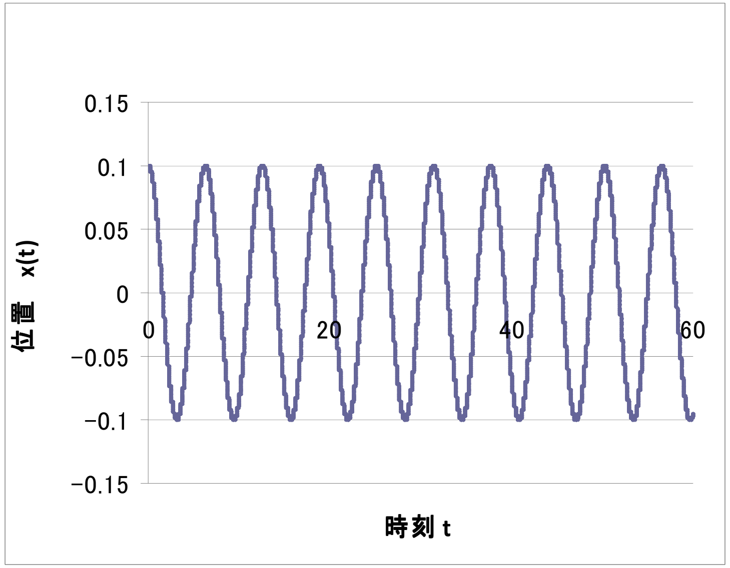
次々と、値を求めることができる。(オイラー法　Euler's Method)

$$\frac{dN}{dt} = -N$$

の場合を試してみよう

単振動





バネ定数：k　　力：$F=-kx$

運動方程式

質量X加速度＝力

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

この場合は 単振動 となる。

$$x=A\sin(\omega t+\phi)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

単振動を近似

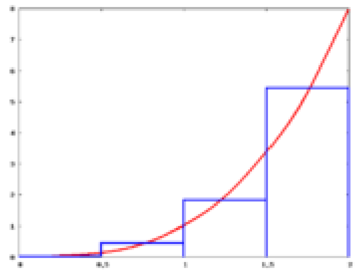
位置 x	微分→ ←積分	速度 v、dx/dt	微分→ ←積分	加速度 a、dv/dt

k=1,m=1　として考えよう 運動方程式は
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x$$

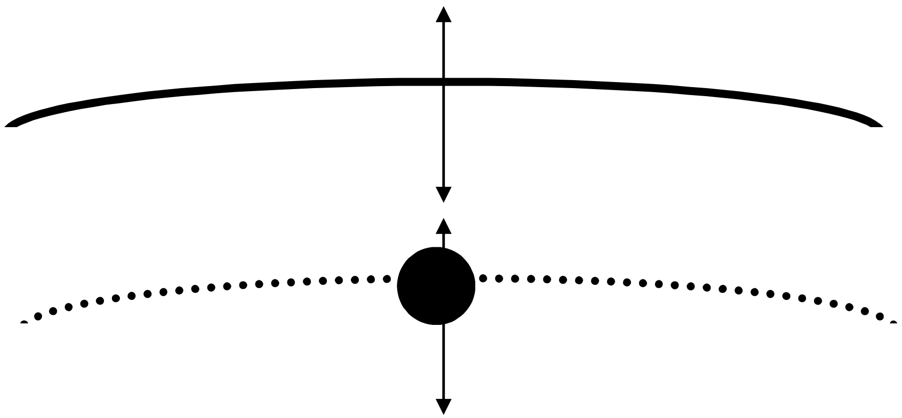
$$f(t+h) = f(t) + f'(t) \cdot h$$ だから

$$\boxed{v(t+\Delta t) = v(t) + a \cdot \Delta t}$$

$$x(t) = x(t-\Delta t) + v \cdot \Delta t$$



連続体（弦）との比較



速度＝波長x振動数

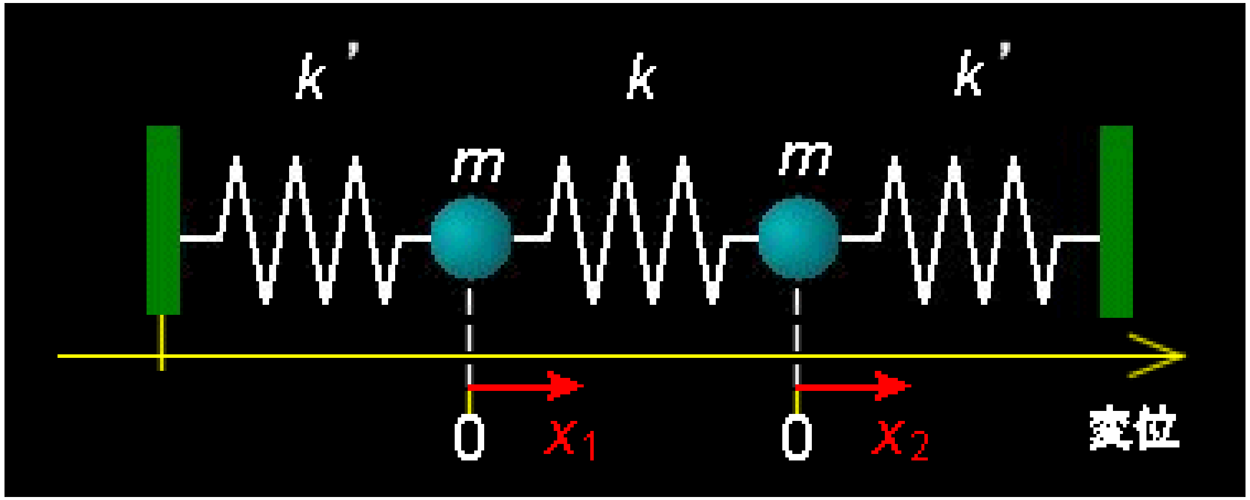
線密度 ⇔ 質点の質量

張力 ⇔ バネ定数

質量、バネ定数と

振動数の関係はどうなっているか？

連成振動



$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k'x_1 + k(x_2-x_1) = -(k'+k)x_1 + kx_2$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2-x_1) - k'x_2 = kx_1 - (k'+k)x_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -(k'+k)x_1 + kx_2 \\[2ex] \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = kx_1 - (k'+k)x_2 \end{cases}$$

（m=1　として考える）

連成振動を近似

位置 x	微分→ ←積分	速度 v、dx/dt	微分→ ←積分	加速度 a、dv/dt

$$a_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k'+k)x_1 + kx_2$$

$$a_2 = \frac{d^2 x_2}{dt^2} = kx_1 - (k'+k)x_2$$

単振動と同じ

初期条件が与えられれば決定できる

$$v_1(t+\Delta t) = v_1(t) + a_1 \cdot \Delta t$$

$$v_2(t+\Delta t) = v_2(t) + a_2 \cdot \Delta t$$

$$x_1(t) = x_1(t-\Delta t) + v_1 \cdot \Delta t$$

$$x_2(t) = x_2(t-\Delta t) + v_2 \cdot \Delta t$$

基準振動

新しい変数１　　重心位置　$q_1 = (x_1 + x_2)/2$

新しい変数２　　相対距離　$q_2 = (x_2 - x_1)$

新しい2つの変数の時間変化を調べよう

（周波数や振幅の時間変化に注目）