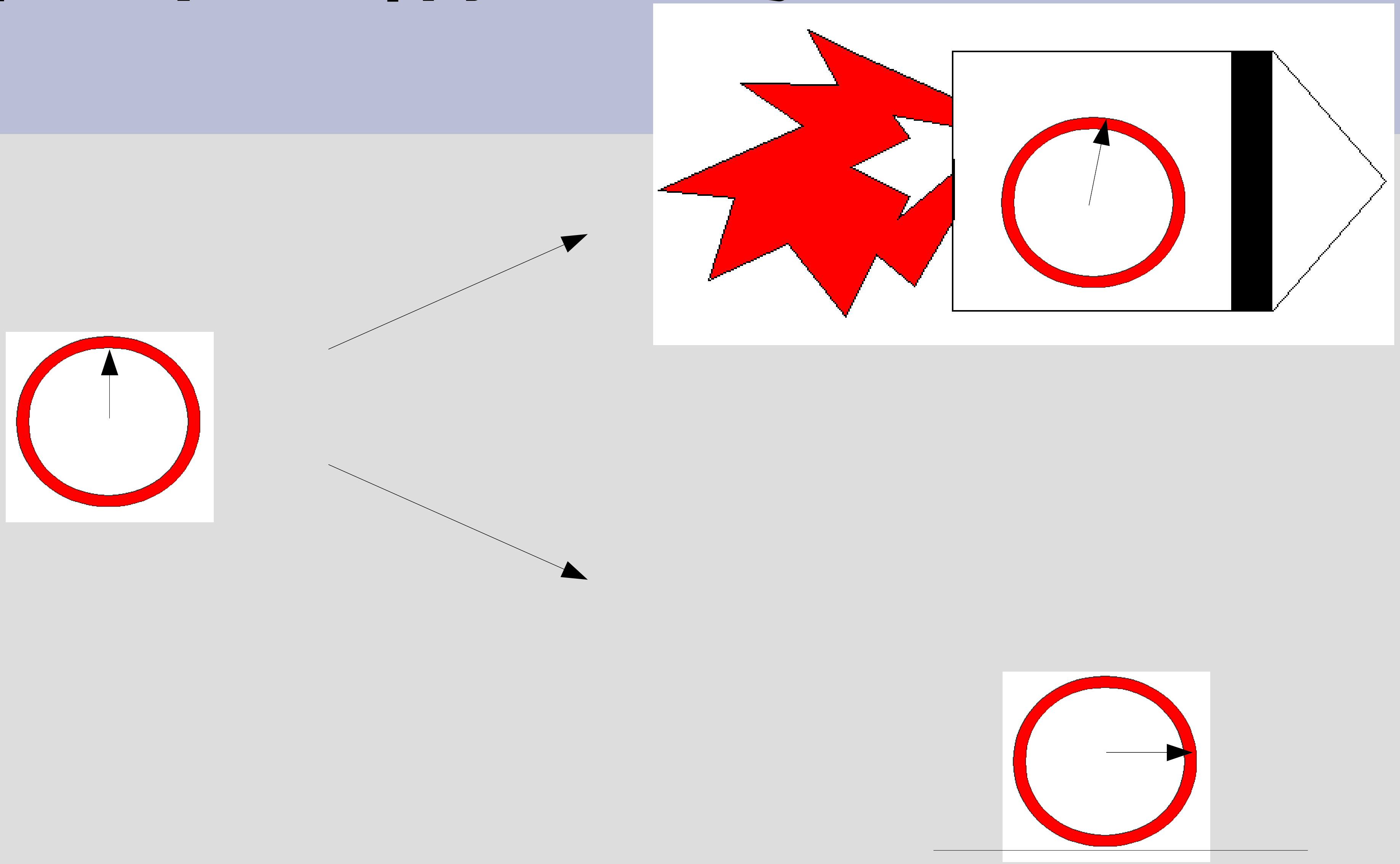
相対性理論
の
初歩

目次

- 序章
- 座標・座標変換
- ニュートン力学と変換
- 特殊相対性原理
- ローレンツ変換
- まとめ

序章

相対性理論的に考えると・・・・



相対性理論的に考えると・・・・

相対性理論によると

- 動いているものは時間がゆっくり流れる。
- 長さの尺度が小さくなる。

この現象は、観測している物体の速さが光速に近づけば近づくほど顕著になります。

光速

$$2.99792458 \times 10^8 \ \ m/s$$

地球を1秒間に7周する。（地球の半径6370Km）

相対性理論とは

観測者によって時間・空間（時空）は、1つの絶対的なものではない。
時空とは、観測者によって異なる、相対的なものである。

異なる観測者間を結ぶ関係が必要！！

↓

ローレンツ変換

目的

- ローレンツ変換を理解すること。
- ローレンツ変換を用いて時間の遅れや、長さの収縮現象を理解すること。
- 相対論的視点を養うこと。

座標・座標変換

座標とは

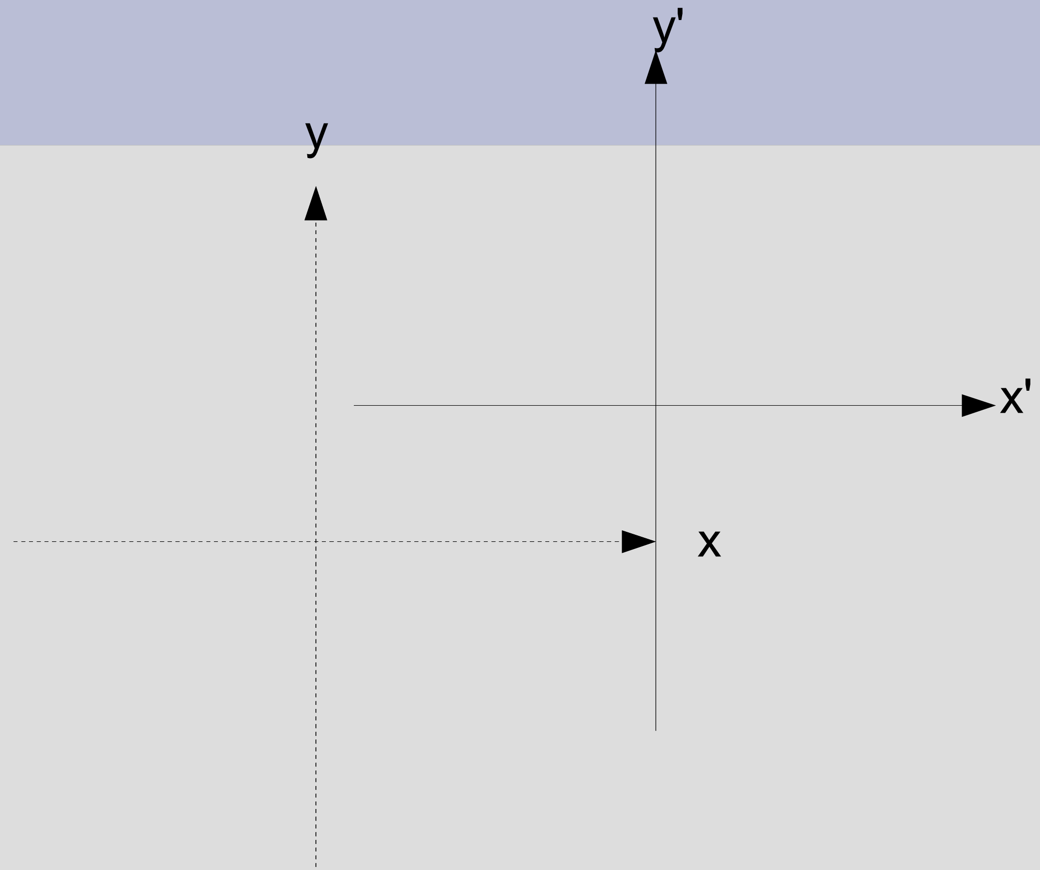
基準点を設けることで、任意の（知りたい）点の位置を数の組（x, y）で表すことである。

この基準点の選び方は選ぶ人によって自由だし、点の位置の数の組でさえも自由である。

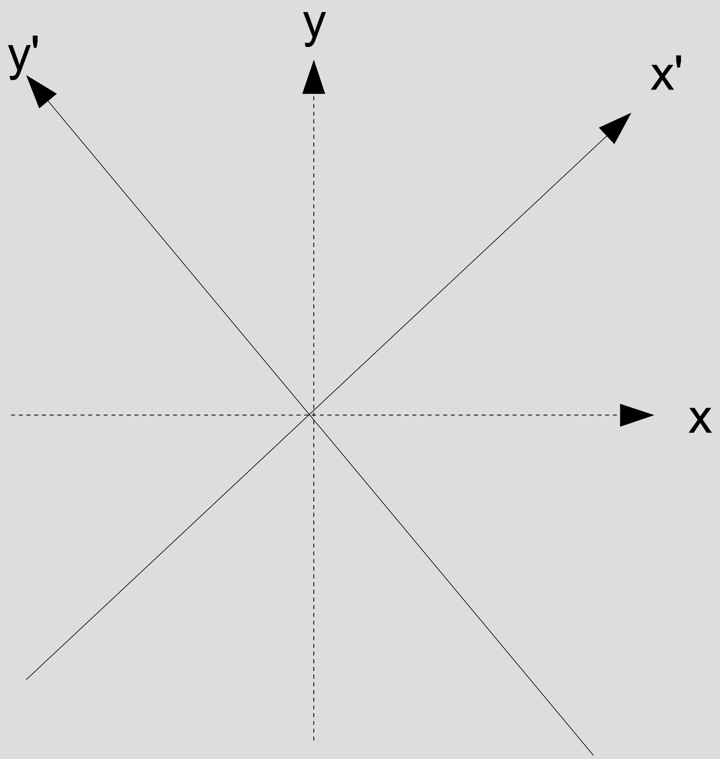
⬇

座標は1つだけではない

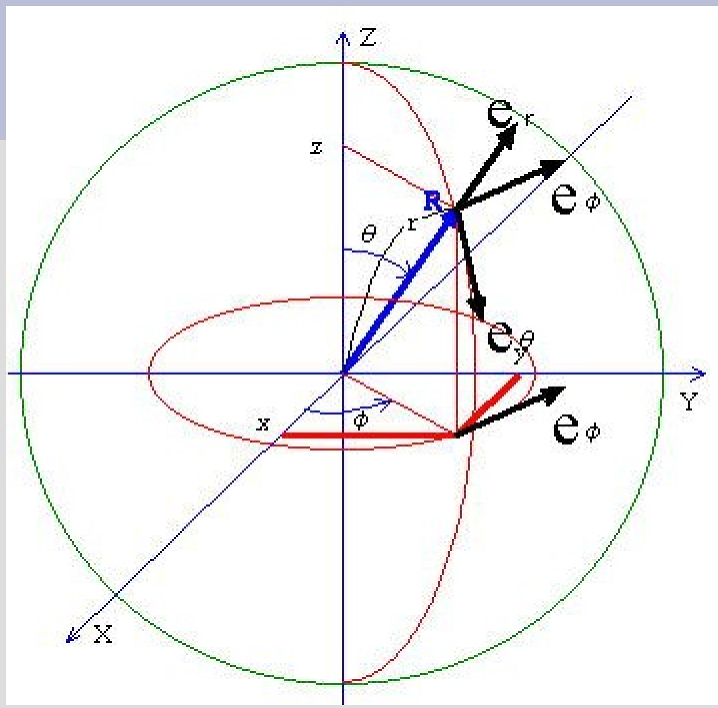
いろいろな座標

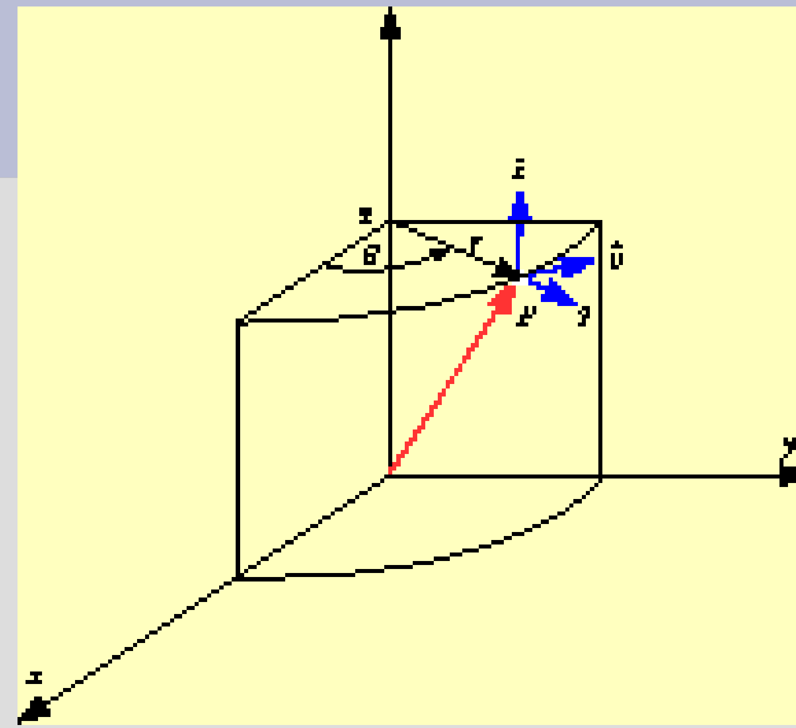


座標軸の平行移動



座標軸の回転



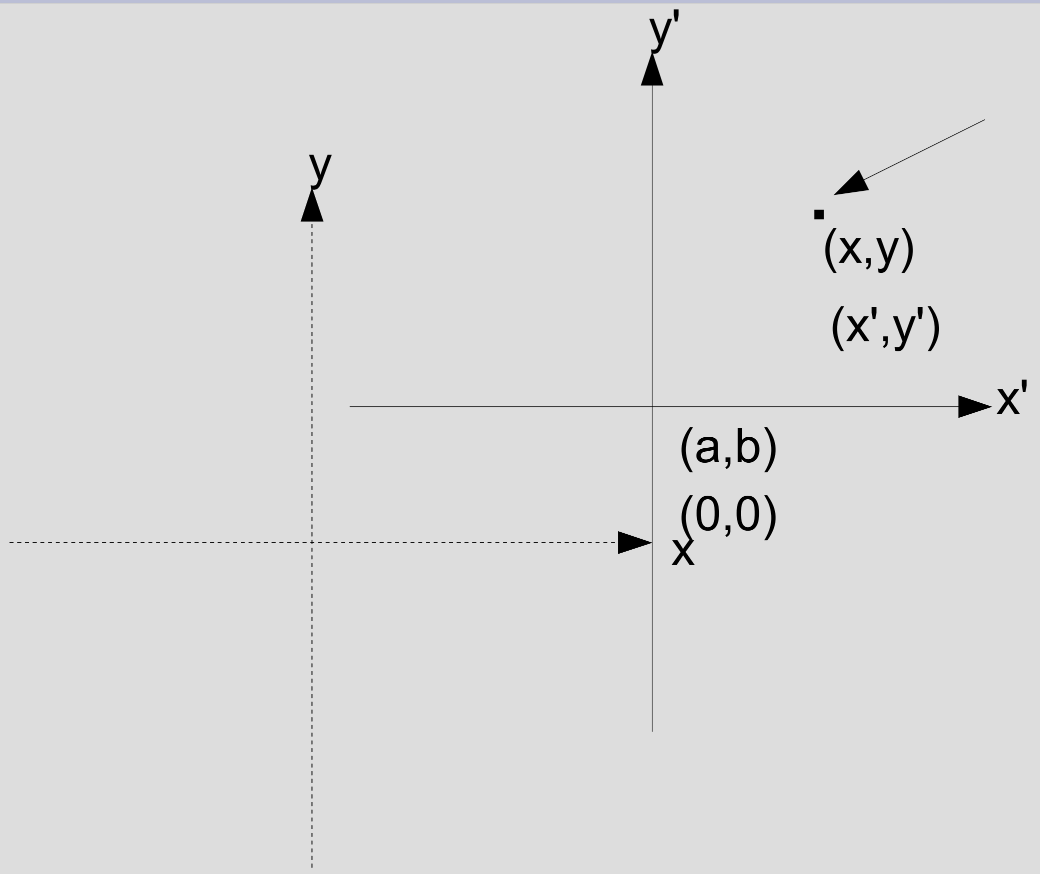


極座標

円柱座標

座標変換（平行移動）

矢印の点に関して以
下の関係が成り立つ

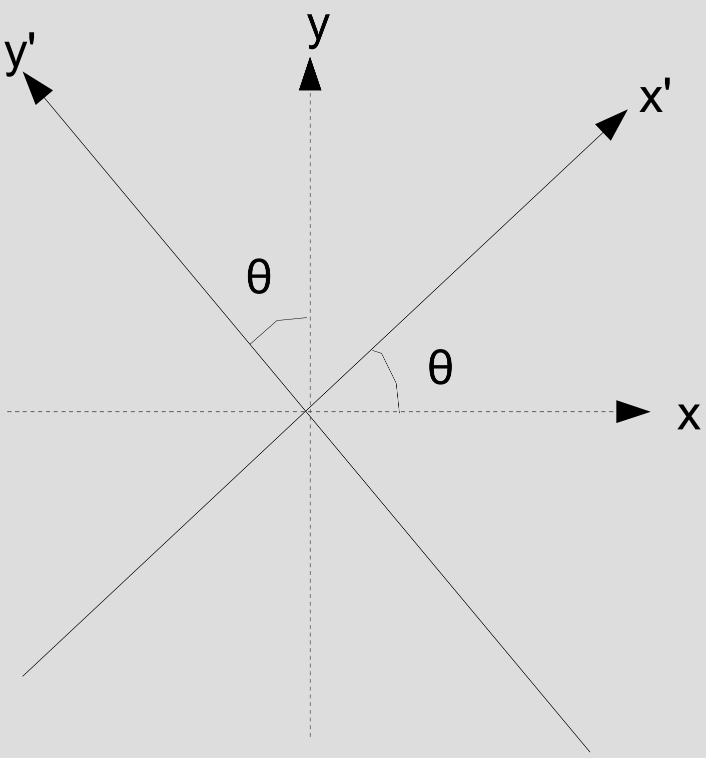


$$x' = x - a$$

$$y' = y - b$$

上の座標が、’が付いていない座標
下の座標が、’が付いている座標

座標変換（回転）



$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

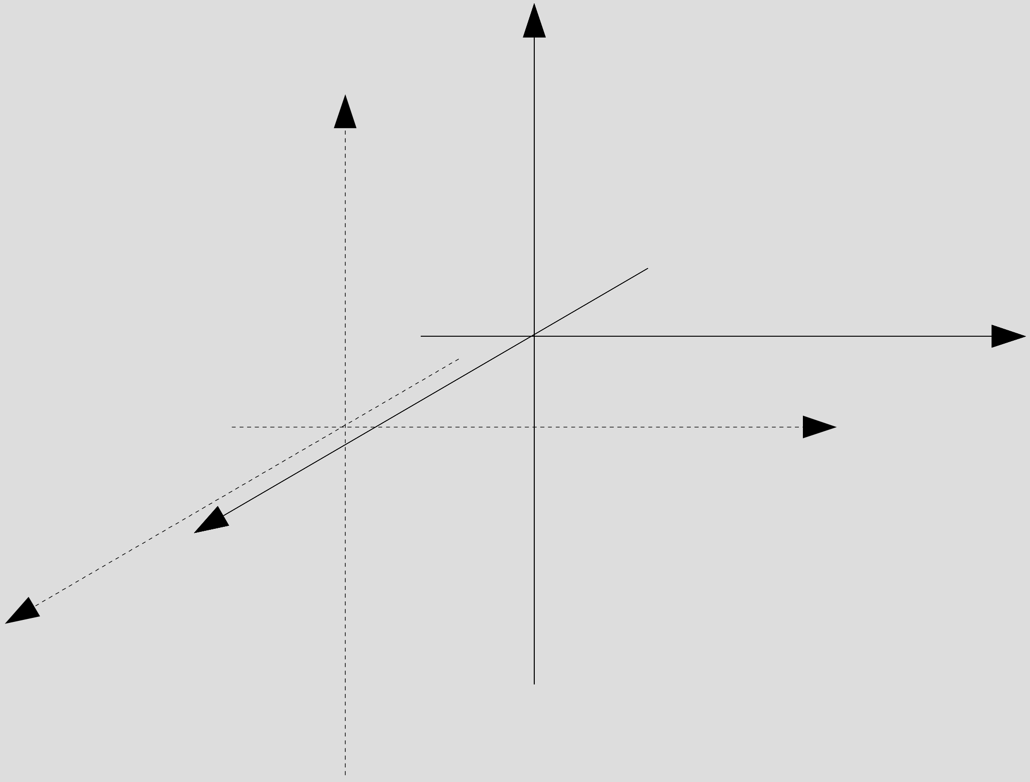
一般的な座標軸の回転

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{33}z$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

※新しい座標は、変換する前の座標の和で書ける

確認１

３次元で座標軸の平行移動を考える。座標の原点が(0, 0, 0)から(a, b, c)に移ったとする。変換前と変換後の座標にはどのような関係が成り立つか。（つまり座標変換の公式を導けということ）

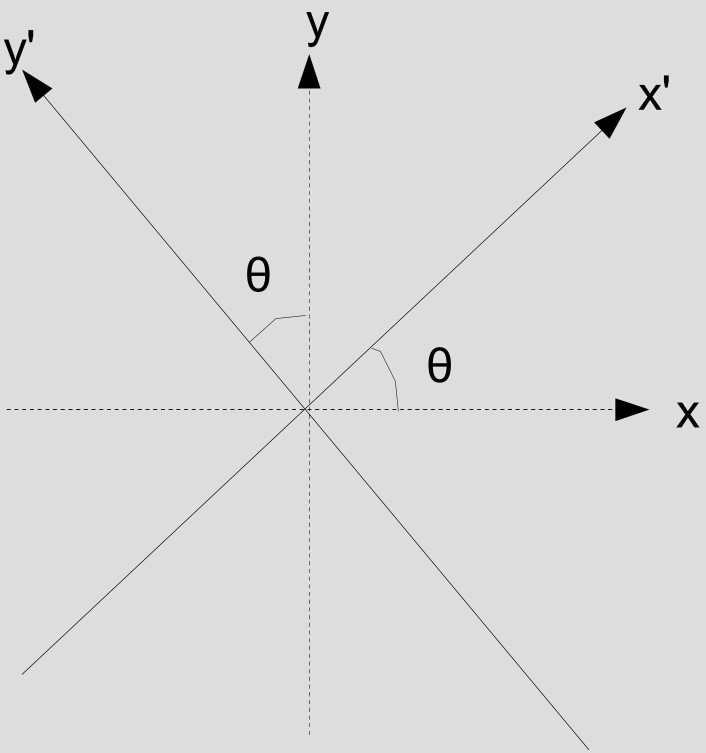


確認 2

- 下式を確かめよ。

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$



ニュートン力学と変換

ニュートンの運動の法則

- 第１の法則
  物体は、力の作用を受けないかぎり、静止の状態あるいは一直線上の一様な運動をそのまま続ける。（慣性の法則）
- 第２の法則
  運動量が時間によって変化する割合はその物体に働く力に比例し、その向きに生じる。（運動の法則）

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F$$

- 第３の法則
  物体１が物体２に力を及ぼす時は、物体２は必ず物体１に対し、大きさが同じで逆向きの力を及ぼす。（作用・反作用の法則）

慣性系（重要！）

物体の運動は座標系を用い記述するわけだが・・・・。

ここで、運動の第一法則を逆に考える

力を受けない物体の運動が等速直線運動として見えるような座標系を選ぶことができるということを示している。

第一法則が成り立つ座標系を慣性系という。

慣性系の例

- 静止した地面
- 自分の部屋
- 等速直線運動をしている電車もしくは車　　　　etc…

確認

- 他に慣性系をあげよ。

- 逆に、慣性系ではない系（非慣性系）をあげよ。

話は変わりますが・・・。

ガリレイの一言
「（実験をしてみれば、船のマストから落とされた）石は船がじっとしていようと、どれほどの速さで動いていようと、常に同じ場所に落ちることが示されるでしょう。ですから大地についても船についても同じ根拠のある以上、石が常に塔の根元に落ちることからは大地の運動についても静止についても何も推論されることはできません。」

何の話と思われますか？

地動説

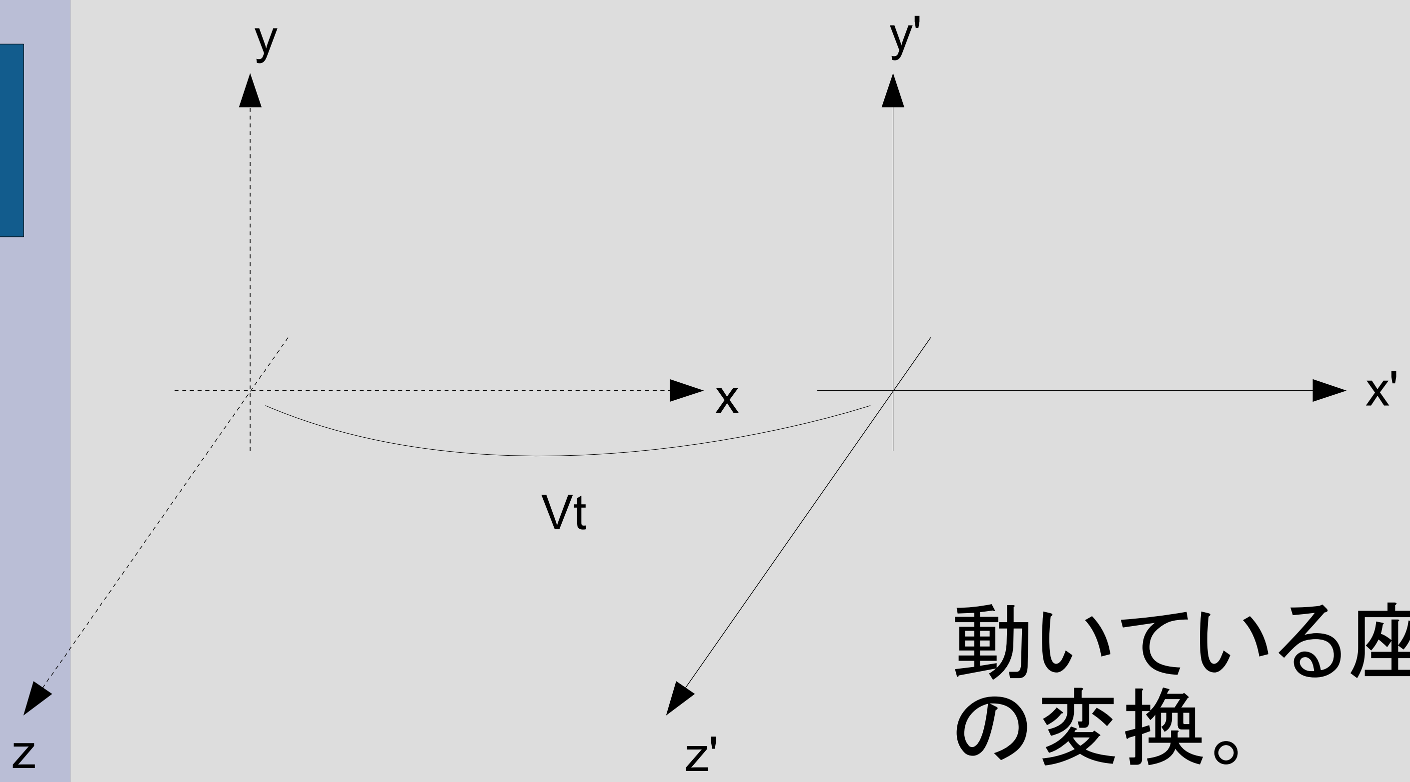
前章との関連

実は、前の章でふれた座標変換によっても運動の法則は変わらない。

証明はしない。

そのかわりに、ガリレイ変換を考察する。（だんだんローレンツ変換に近づいてきた！）

ガリレイ変換



動いている座標系（慣性系）への変換。

図の場合、’の付いている座標系（慣性系）はx方向に動いている。

ガリレイ変換の変換公式

$$x' = x - Vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

新しい座標での、運動方程式を考えるため、これを運動方程式に代入する。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

運動方程式

$$x' = x - Vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$\Big\downarrow \quad \text{微分する。}$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V \quad \text{相対速度}$$
$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

微分する。

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = d^2\frac{y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt}$$

2つの座標系で加速度
は等しい。

さらに、

$$F(x, y, z, t) = F'(x', y', z', t)$$

と考える。したがって以上のことから、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \longrightarrow m\frac{d^2x'}{dt^2} = F'$$

y,z　も同様。

ガリレイの相対性原理

ガリレイ変換の捉え方を変えると、あらゆる慣性系に対し同じ力学の法則が成り立つといえる。

確認

原点に静止しているA君と、原点に対して20m／sで動いている（電車や車などに乗っている）B君という2人の観測者がいたとする。
この2人が、原点に対して

1）30m／s
2）20m／s
3）10m／s

で動いている物体C（鳥、飛行機、UFOなど）を観測したとする。この2人は1秒後にどのようにCを観測するでしょうか。その位置と速度をガリレイ変換を用いて考察せよ。

ただし、t＝0s（つまり最初）A君とB君とCは同じ位置、つまり原点にいたとする。

確認

動いている船のマストの上から、おもりを落下させたとする。陸にいるA君とマストの上にいるB君は、どのようにこのおもりを観測するでしょうか。

特殊相対性原理

ローレンツ変換に向けて…

特殊相対性理論では、ガリレイ変換は否定される。
ローレンツ変換は、ガリレイ変換を特殊相対理論に適応できるようにしたものである。

その前に・・・・

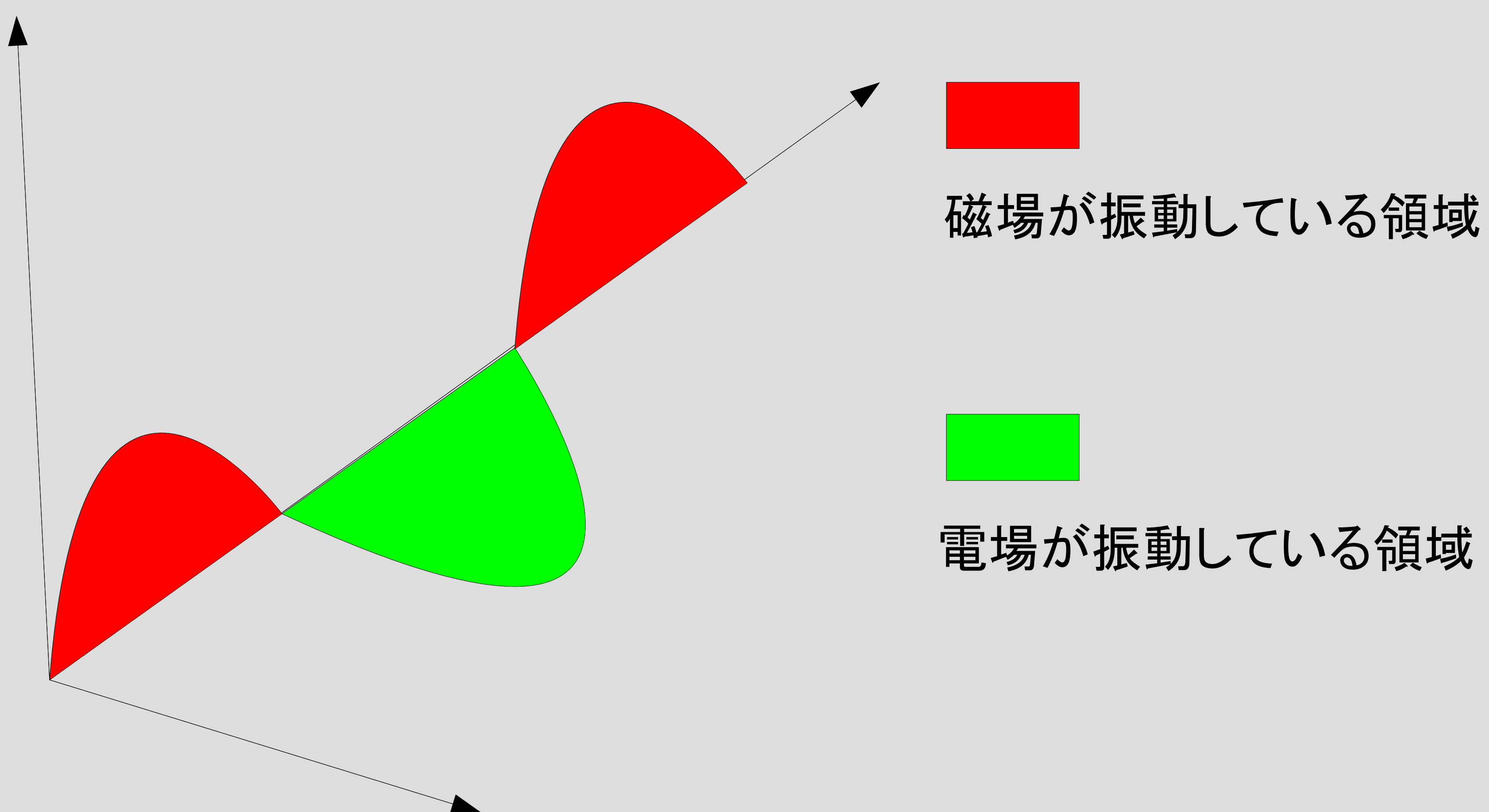
アインシュタインは、このような疑問を持ってた・・・・・
「もし、自分が光の速度で走っているとしたら、光はどのように見えるのだろうか？」

この言葉の意味を知るために
光に対する、科学史を振り返る必要がある。

光の科学史

- **光の粒子説　ニュートンなど　（１７世紀）**
  光の直進性　光の反射の法則　光の屈折の法則
- **光の波動説　ホイヘンス　ヤング（１７～１９世紀）**
  光の反射の法則　光の屈折の法則　光の回折現象
- 光の横波説　フレネル
  偏光特性

- **光の電磁場説　マクスウェル　ヘルツ（１９世紀）**
  マクスウェル方程式が完成し、電磁場が予言される。その波は、横波であり伝播速度が光の速さに等しいことから



- **エーテルの存在説**
  光は横波なのだから、それを伝える媒質が必要である。その媒質をエーテルと呼んだ。当然エーテルから見た光の伝達速度が一般的な速さであると考えられる。

  さて
  地球上の観測者は、エーテルに対してある一定の相対速度で動いているはずだから、光はその相対速度分だけ違って観測されるはずである。

マイケルソンとモーレーが光の速度を精密に測った。地球の公転を利用し、季節ごとの光さを観測しエーテルに対する地球の相対的な運動を測ろうとした。

しかし、光の観測結果は季節よらず一定だった。

- **電磁気学と力学**
  ガリレイ変換によって、光速が慣性系によって変換されるのだから、マクスウェル方程式から直接導出される光速も変換されるべきである。

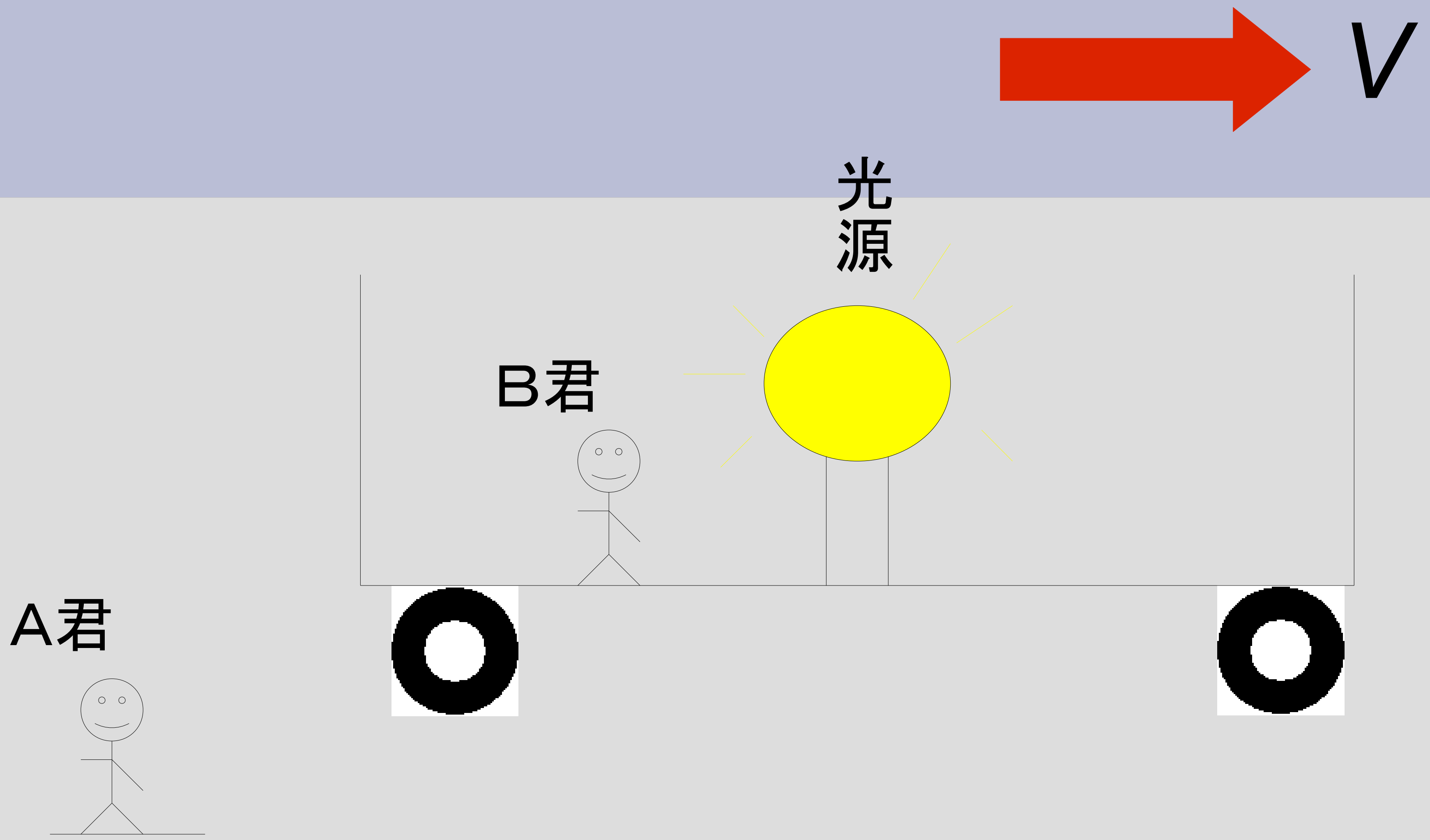
  だから言い換えると、マクスウェル方程式が慣性系によって違う形になってしまう。

ここから本番！

アインシュタインの相対性原理（特殊相対性原理）
一つ目
「物理法則は全ての慣性系に対して同じ形で表される。」

二つ目（光速不変の原理）
「真空中の光の速さは光源の運動状態に無関係である。」

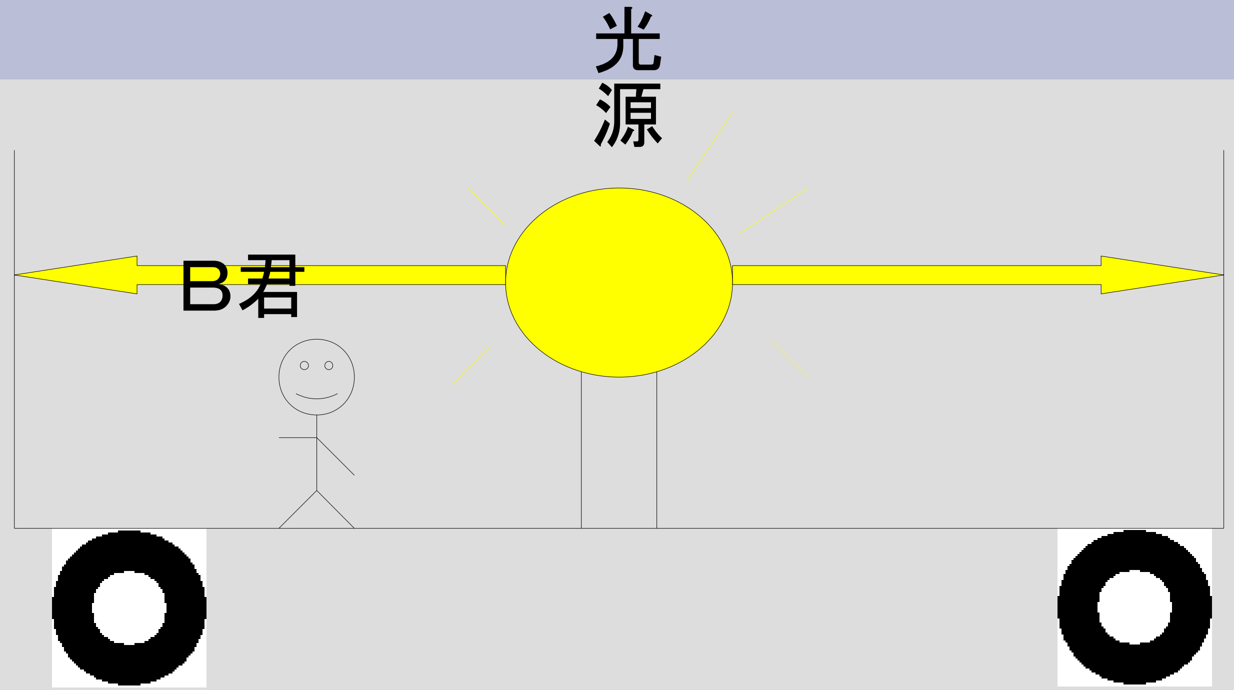
復習
ガリレイの相対性原理は力学のみに対して言われたものである。



A君：地面に静止

B君：地面に対し速さVで動く車に乗っている。車は中心に光源を積んでいる。

B君について



Ｂ君から見ると、光源から出た光は左右に対して同じ速さで動く（当たり前だよね）ので左右に同時に届く。

数式で表すと

変数

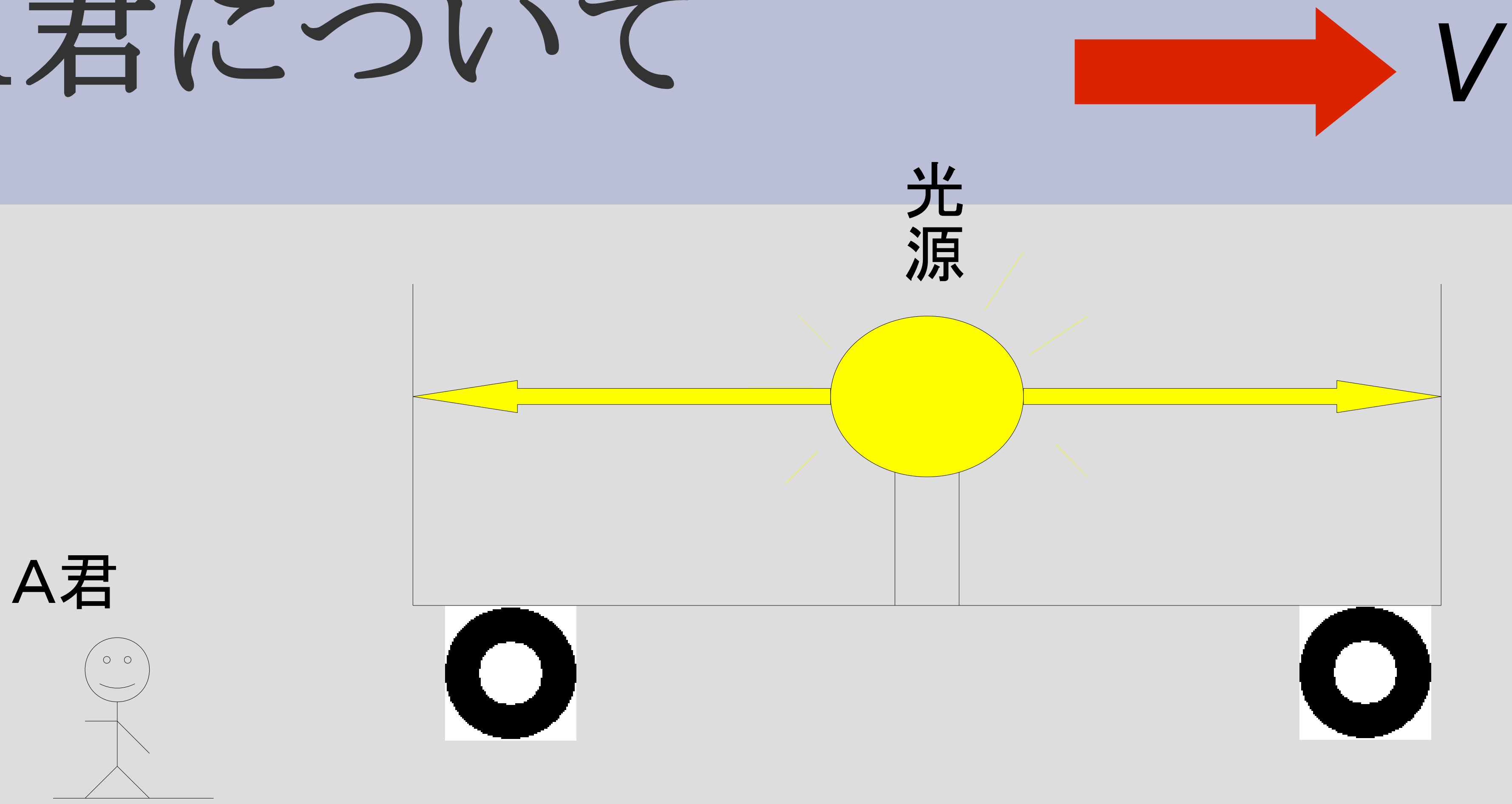
左端に到着時間:$t'_{左}$
中央から端までの長さ:l

$$t'_{左} = \frac{l}{c}$$

右端に到着時間:$t'_{右}$
中央から端までの長さ:l

$$t'_{右} = \frac{l}{c}$$

A君について



従来の考えならば、やはり光源から出た光は同時に左右に到着するべきである。

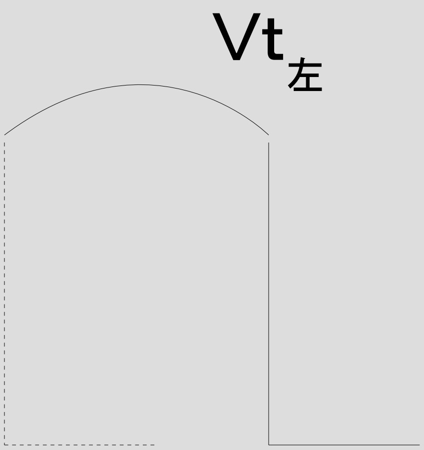
従来の考え

光源から光が出て、車の左端に到着する時間を考察する。

変数

到着時間:$t_{左}$

中央から端までの長さ:l



端は$t_{左}$の間に左に動くことに注意！

$$(c-V)t_{左} = l - Vt_{左}$$

$$t_{左} = \frac{l}{c}$$

光源から光が出て、車の右端に到着する時間を考察する。

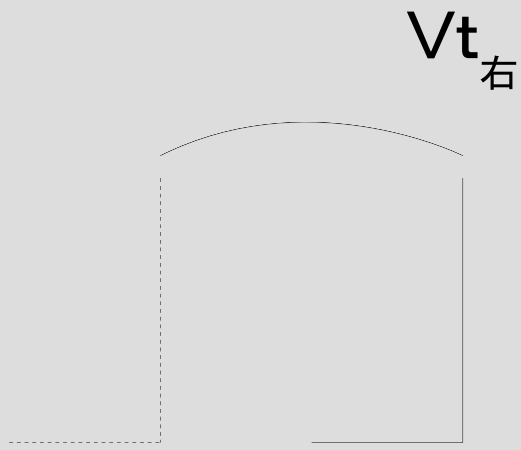
変数

到着時間：$t_{右}$

中央から端までの長さ：l

$$(c+V)t_{右} = l + Vt_{右}$$

$$t_{右} = \frac{l}{c}$$



よって、

$$t_{左} = t_{右}$$

端は$t_{右}$の間に中央に近づくことに注意！

以上をまとめると

$$t'_{左} = t'_{右} = t_{左} = t_{右}¿$$

しかしながら、相対性理論ではこうはならない！

光速不変の原理を思い出すと

「真空中の光の速さは光源の運動状態に無関係である。」

A君を再考してみよう！

相対論的A君の解釈

$$(c-V)t_{左} = l - Vt_{左} \longrightarrow ct_{左} = l - Vt_{左}$$

$$t_{左} = \frac{l}{c+V}$$

$$(c+V)t_{右} = l + Vt_{右} \longrightarrow ct_{右} = l + Vt_{右}$$

$$t_{右} = \frac{l}{c-V}$$

結論

$$t_{左} - t_{右} = \frac{2\mathrm{lV}}{c^2 - V^2} = \frac{2\mathrm{l}}{c}\frac{V/c}{1 - (V/c)^2} > 0$$

時間という概念が慣性系よって異なる！

ローレンツ変換

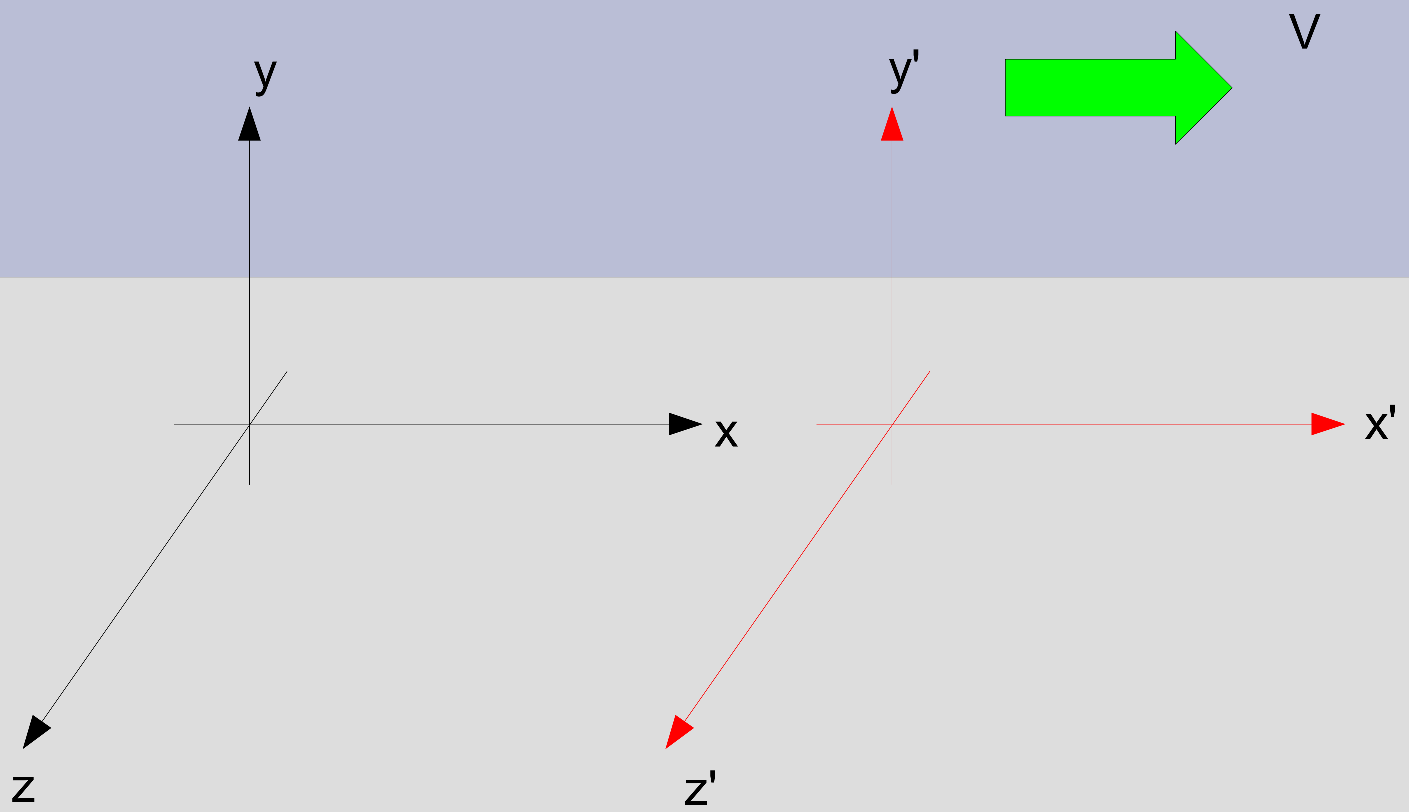
ローレンツ変換とは

異なる2つの慣性系（観測者）を結ぶ、関係式である。

ガリレイ変換の一般化である。

ガリレイ変換

$$x' = x - Vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$



状況設定

$$t = t' = 0$$

の時2つの慣性系は重なっている。

’の付いた慣性系は’の付いてない慣性系に対し、x方向に対しVで動いている。

ローレンツ変換の公式

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

ローレンツ変換について考察

$\frac{V}{c} \ll 1$ なので、 $\frac{V}{c} \to 0$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$x' = x - Vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

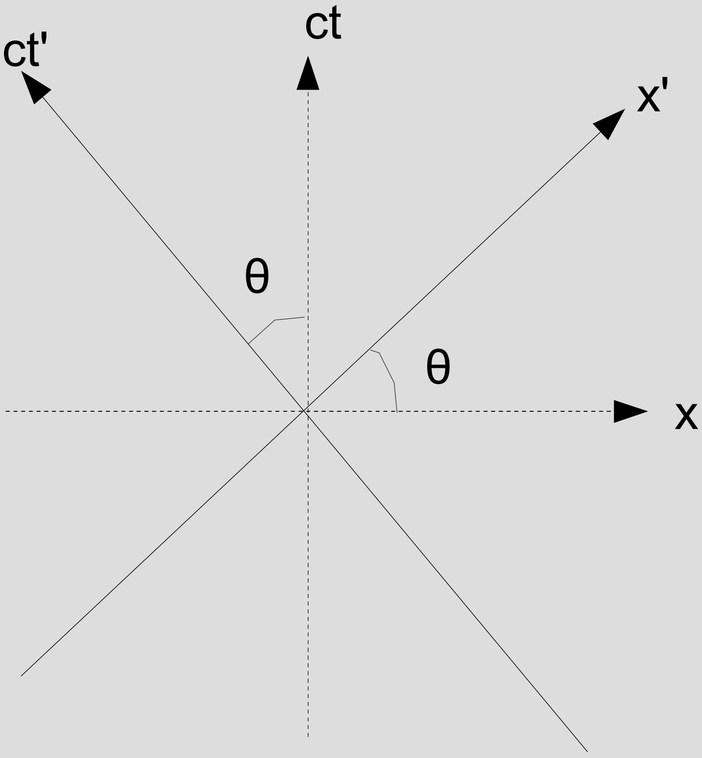
$$t' = t$$

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}ct - \frac{(V/c)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}x$$

$$x' = -\frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}}ct + \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}x$$

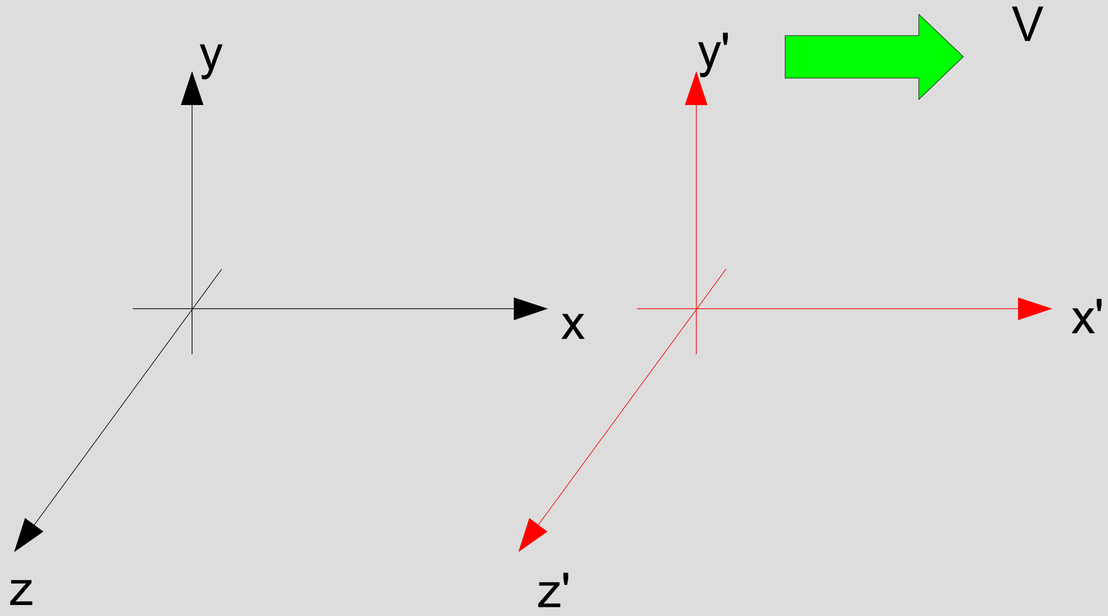
$$y' = y$$

$$z' = z$$



4次元空間の回転の関係式

ローレンツ変換の導出



$$(x, y, z, t)$$

$$(x', y', z', t')$$

状況設定

$t = t' = 0$

の時2つの慣性系は重なっている。

’の付いた慣性系は’の付いてない慣性系に対し、x方向に対しVで動いている。

仮定

ローレンツ変換は、ガリレイ変換の一般化なので、

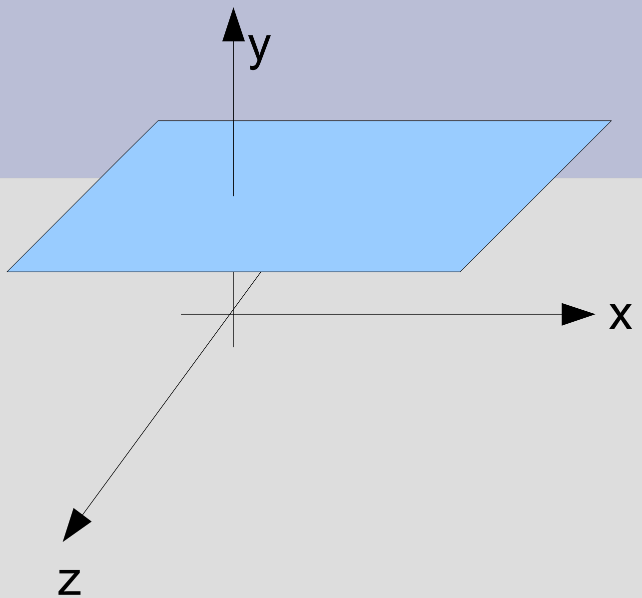
(x', y', z', t') は

(x, y, z, t) の一次関数であると仮定する。

つまり、

$$x' = ax + by + cz + dt \qquad etc$$

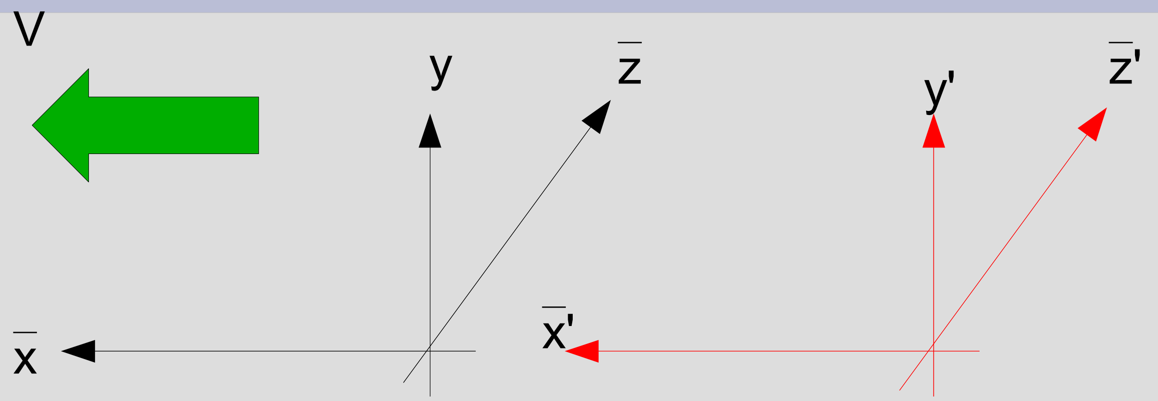
y座標から



$$y' = a(V)\,y$$

と考える。

他の座標(x,z,t)が表れないのは、y軸の長さの尺度が変わっても、y の一定の点は xz もしくは x'z' 上にあるべきだからである。



テクニック！！
180°回転したグラフを考えると、'の付いてない慣性系がVで動いているという状況を考えれる。‾は、マイナスということ、　例）$\bar{x}$=-x

$$\bar{y} = a(V)\,y'$$

$$y' = a(V)\,y$$

$$\bar{y} = a(V)\,y' \qquad (\bar{y} = -y)$$

$$\Downarrow$$

$$a(V) = 1$$

zも同様！

x 座標について

$$x' = b(V)(x - Vt)$$

と考える。

なぜならば、x' = 0 は上式 x = Vt で与えられるからだ。

もう一度、先ほどの180°回った慣性系を考えたならば・・・・。

$$\bar{x} = b(V)(\bar{x}' - Vt')$$

$$(\bar{x} = -x, \quad \bar{x}' = -x)$$

先ほどの式、

$$x' = b(V)(x - Vt)$$

$$\Downarrow$$

$$t' = b(V)t - \frac{b(V)^2 - 1}{b(V)V}x$$

光速不変の原理より

$$x = ct$$

$$x' = ct'$$

先ほどの式

$$x' = b(V)(x - Vt)$$

$$t' = b(V)t - \frac{b(V)^2 - 1}{b(V)V}x$$

$$\Rightarrow \quad b(V) = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

証明終了

ローレンツ変換

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

ローレンツ逆変換

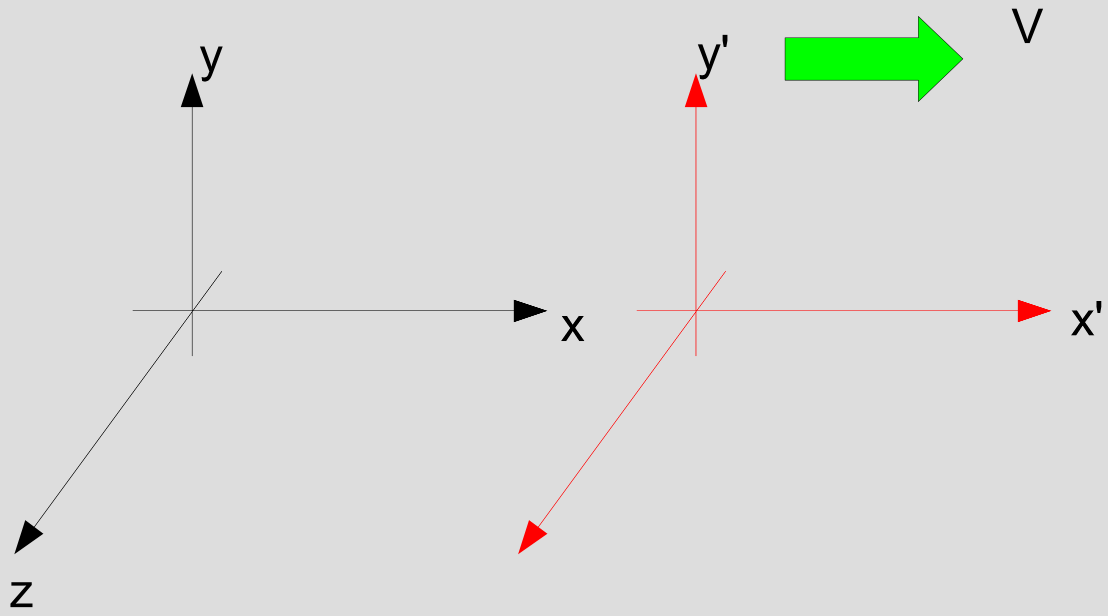
$$x = \frac{x' + Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + Vx/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

時間の遅れ



’の付いている慣性系を S’
’の付いていない慣性系を S と呼ぶことこする。

S と S' の原点に時計が置いてあるとする。
※t=t'=0 最初2つの時計は一致している。

S' で、t' 時間が経過した時、S で経過した時間 t は

S'

$$\left(x'=0,\ \ y'=0,\ \ z'=0,\ \ t'\right)$$

$$\downarrow$$

ローレンツ逆変換を用いて、

S

$$\left(x=Vt,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ t\right)$$

$$t = \frac{t' + Vx/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \xleftarrow{\text{代入}} (x'=0,\ y'=0,\ z'=0,\ t')$$

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \qquad \sqrt{1-(V/c)^2} \le 1$$

$$t' = t\sqrt{1-(V/c)^2} \le t$$

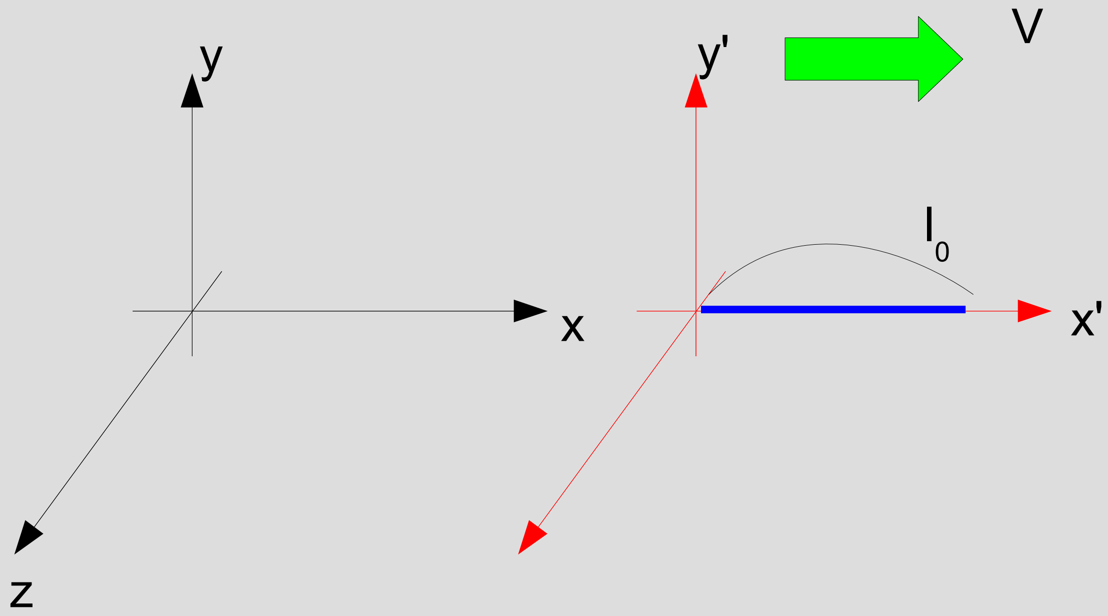
t は慣性系S の時計であり、t' は慣性系S' の時計である。(S’ が動いている方)

$$t \geq t'$$

よって、慣性系S’ の時計は遅れいていることになる！

つまり、動いている観測者は時間がゆっくり流れる。

長さの収縮



慣性系S' に運動している方向に向かって、長さ l_0 の棒が置いていあるとする。

※違う慣性系から見ると長さが異なるので、今の場合棒にとって静止している S' が真の棒の長さなので注意

※長さとは、同時刻の２点間の距離である。これに注意すると

S

$$(x_{1,} \quad 0, \quad 0, \quad t)$$

$$(x_{2,} \quad 0, \quad 0, \quad t)$$

$$\Big\downarrow \text{ ローレンツ変換}$$

S'

$$(x'_{1,} \quad 0, \quad 0, \quad t'_1)$$

$$(x'_{2,} \quad 0, \quad 0, \quad t'_2)$$

$$(l_0 = x'_2 - x'_1)$$

代入

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \longleftarrow \begin{matrix} (x_{1,} \quad 0, \quad 0, \quad t) \\ (x_{2,} \quad 0, \quad 0, \quad t) \end{matrix}$$

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \qquad x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

$$l = x_2 - x_1$$

¿ $= Vt + \sqrt{1-(V/c)^2}\,x'_2 - Vt - \sqrt{1-(V/c)^2}\,x'_1$

¿ $= (x'_2 - x'_1)\sqrt{1-(V/c)^2}$

¿ $= l_0\sqrt{1-(V/c)^2} \le l_0$ $\qquad$ $l \le l_0$

つまり、動いている（運動方向に伸びた）棒は短く見えることになる！！

演習

相対性理論では、長さの尺度や時間が、

$$\sqrt{1-(V/c)^2}$$

を因子として、変化する。
このVに様々な値を代入し考察せよ。

$$c = 3 \times 10^8 m/s$$

人間（割と速い人）	10m/s
新幹線	85m/s
音速	340m/s
第一宇宙速度（衛星の公転速度）	7910m/s
第二宇宙速度（スペースシャトルの打ち上げ）	11200m/s
μ粒子	0.999c

演習

さきほどのμ粒子について考察する。この粒子は静止していると、2.2×10^{-6}s と一瞬で崩壊してしまう。しかし、相対論効果で寿命が延びる。さて、どれくらいになるか。

μ粒子の速さ: 0.999c

演習

相対性理論では、空間･時間の4つの座標によって考える。この4つの座標（t、x、y、z）を世界点という。さて、この世界点の距離、世界距離を以下に定義する。

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

この世界距離はどの慣性系で変わらない普遍な量である。これを示せ。

ヒント

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

代入

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

補足

逆に世界距離を普遍にする変換が、ローレンツ変換であると言える。

実は、このローレンツ変換に対して普遍な量を利用して、相対論的な力学、つまりローレンツ変換に対して普遍な力学を構築することができる！！

まとめ

- 動いている観測者の時計はゆっくり進む。
- 動いている物の長さは、短くなる。
- 時空とは、絶対的なものではなく観測者によって異なる相対的な概念である。
- 異なる、慣性系を結ぶ変換をローレンツ変換という。これは、ガリレイ変換の一般化である。