

2009/10/31
科学先取り岡山コース

りょうし りきがく

量子力学入門 1

Quantum Mechanics

大学院自然科学研究科
(理学部物理学科)

岡田 耕三



内容

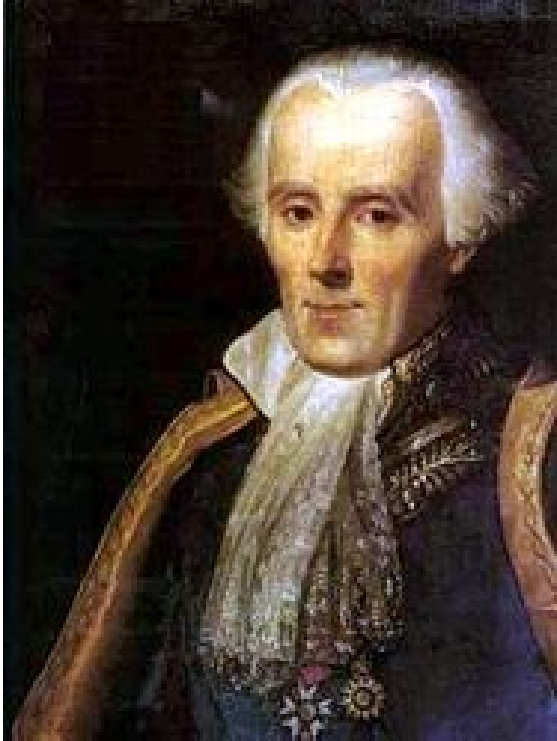
1. ラプラスの悪魔
2. はかない命
3. 掟破り
4. 波と粒
5. 猫は生きているか
6. 不確かさ
7. 閉じ込めるとおとなしくなるか
8. シュールな姿
9. 投げつけられたボール

2008年度
講義『中学生に分かる微積分学』
--- おさらい編 ---

高校物理

1. ラフレラスの悪魔





ピエール＝シモン・ラプラス (1749-1827)

数学者でした。
フランス革命が1789年。
ベートーヴェンやモーツァルトの時代に
生きた人です。

(注) ニュートン (1642-1727)
徳川吉宗 (1684-1751)
ベートーベン (1770-1827)

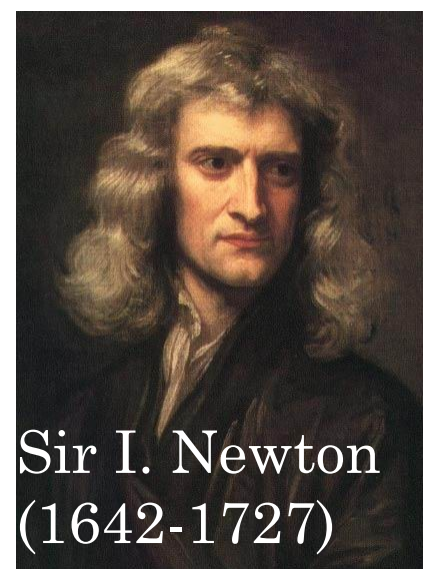
ラプラス 『確率の解析的理論』(1812年)

もしもある瞬間における全ての物質の力学的状態と力を知ることができ、かつ、もしもそれらのデータを解析できるだけの能力の知性が存在するとすれば、この知性にとっては、不確実なことは何もなくなり、その目には未来も(過去同様に)全て見えているであろう。

後で **ラプラスの悪魔**
と呼ばれるようになった

Newton力学

$$\frac{d}{dt}(m v) = F$$

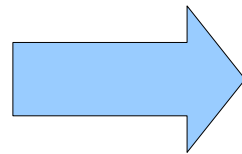


Sir I. Newton
(1642-1727)

「自然哲学の数学的諸原理(プリンキピア)」(1687)に運動の3法則が書かれている。この本が発表されたのは40才を過ぎてからのことであるが、この3法則は20才過ぎの頃に既に完成していた。

日本では、1687年に将軍綱吉が「生類憐れみの令」を出しています。
あの有名なバッハ(J. S. Bach, (1685-1750)が2歳のころです。

このニュートンの運動方程式は物体の位置座標の時間発展を完全に記述する



決定論的方程式です。

(物体の位置座標の時間変化を曖昧さなく決定してしまう方程式ということ)

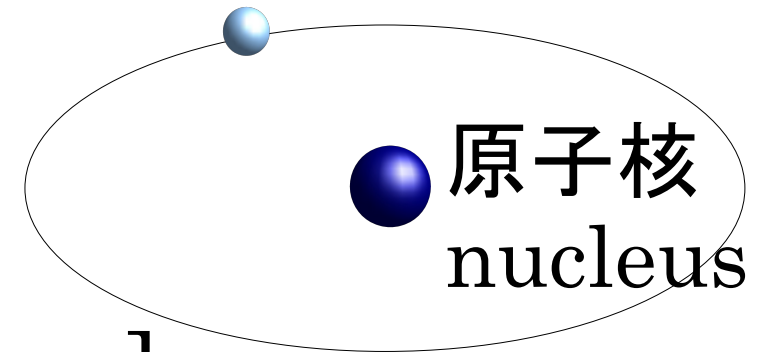
将来、コンピュータが高性能になれば、それらのコンピュータを用いてあなたの未来を完全に
予言できるようになる？



2. はかない命

原子の電子軌道の直径

電子
electron



$$10^{-10} [\text{m}] = 1[\text{\AA}] = 0.1 [\text{nm}]$$

オングストローム

ナノメートル

原子核の大きさの目安

$$10^{-15} [\text{m}] = 1 [\text{fm}]$$

フェムトメートル

$$1[\text{m}] = 10^{-3}[\text{mm}] = 10^{-6}[\mu\text{m}] = 10^{-9}[\text{nm}] = 10^{-12}[\text{pm}] = 10^{-15}[\text{fm}]$$

ミリ マイクロ ナノ ピコ フェムト

問

陽子(水素原子の原子核)を1円玉と同じ体積に詰め込んだらどれくらいの重さになるでしょうか？

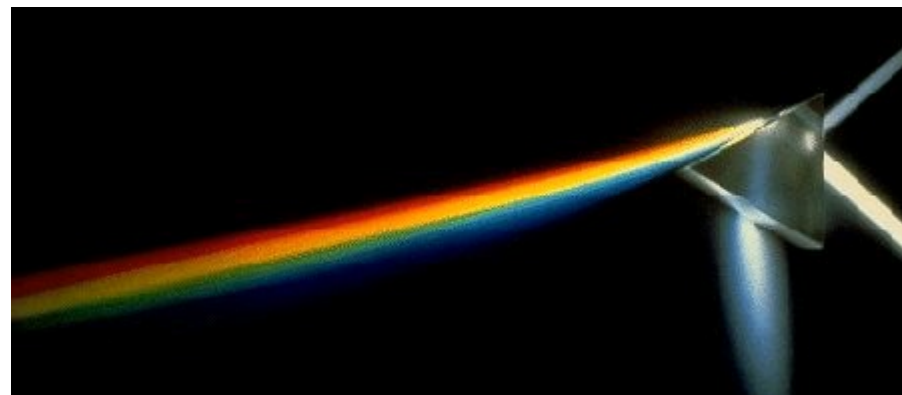
アルミニウムの密度 = $2.7 \text{ [g/cm}^3\text{]}$

1円玉の質量 = 1 [g]

陽子の半径 = $1 \text{ [fm]} = 10^{-15} \text{ [m]}$

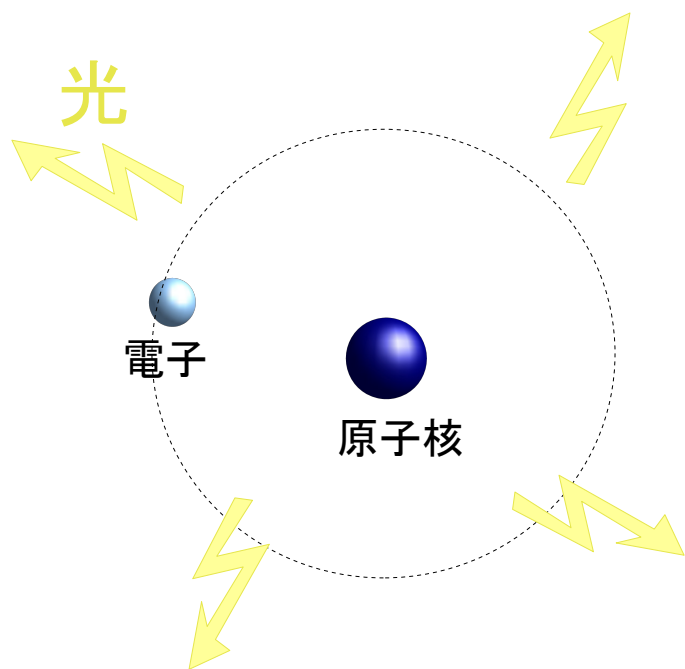
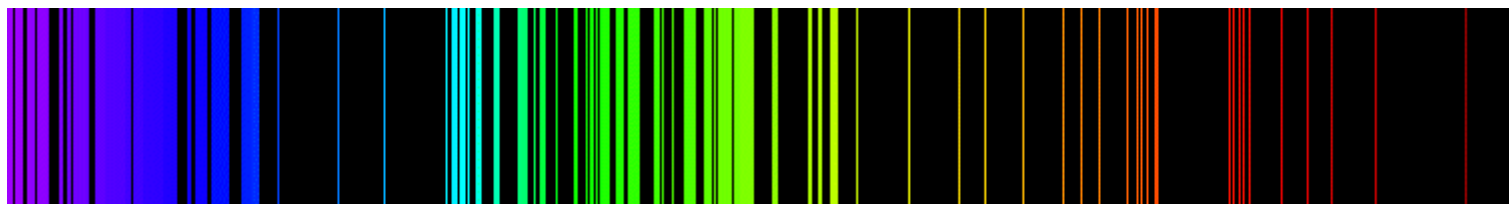
陽子の質量 = $1.7 \times 10^{-27} \text{ [kg]}$

スペクトル



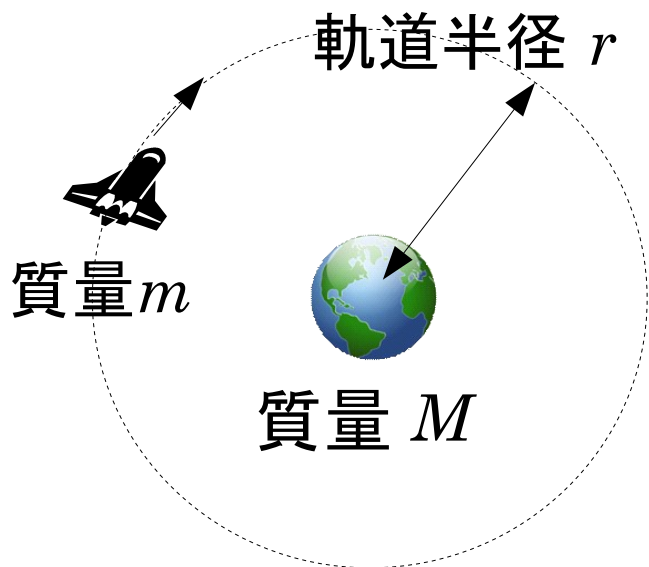
三角プリズムによる分光

鉄の輝線スペクトル



物質から発せられる光の
スペクトル分布の規則性
を古典物理学で説明できるか？

地球を周回するスペースシャトルは落ち続けている！



ニュートンの第1法則

物体に対して力が働かなければ、物体は静止、もしくは等速直線運動をする
(慣性の法則)

スペースシャトルは地球の重力のために運動の向きを刻々と変化させている
(等速直線運動ではない)

万有引力

$$F_G = G \frac{mM}{r^2}$$

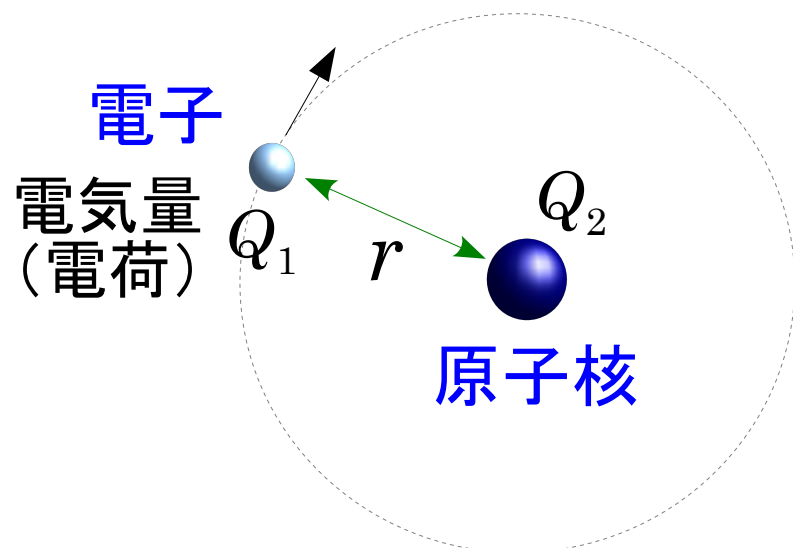
$$G = 6.7 \times 10^{-11} [Nm^2 kg^{-2}]$$



落ち続けるが故に、
回転運動をしている

加速度運動

原子核を周回する電子も落ち続けている！



原子核を周回する電子も
クーロン力(静電力)を受けて
落ち続けている。

クーロン引力
(静電力)

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

クーロン力の大きさは、
電荷の積に比例し、距離
の2乗に反比例する

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} [N^{-1} m^{-2} C^2]$$

真空の誘電率

問

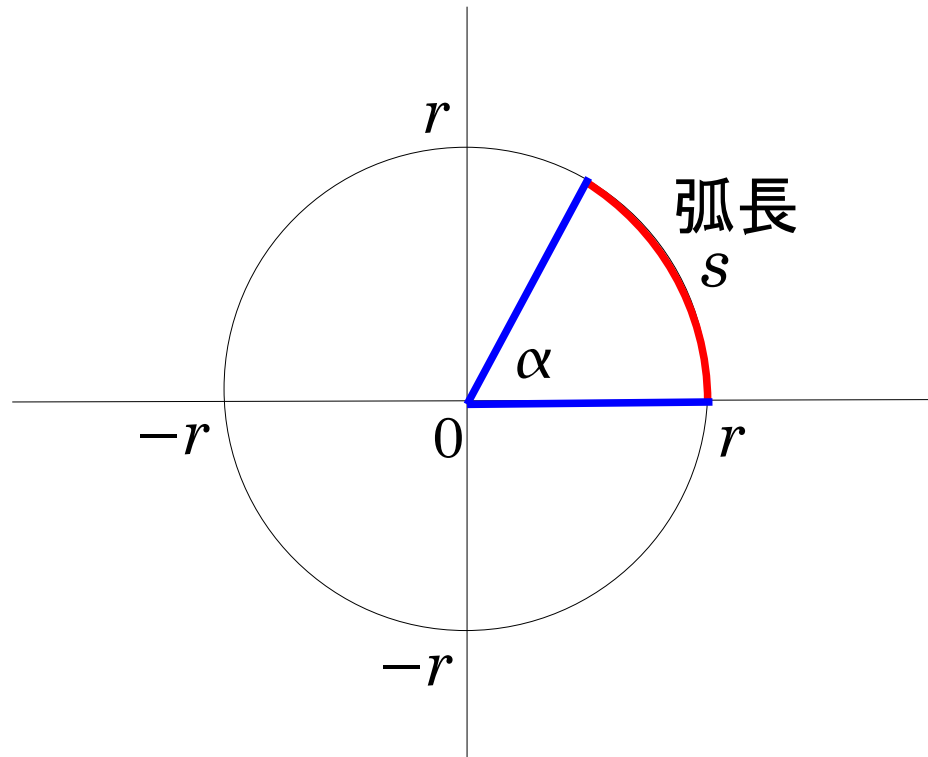
電子と陽子の距離 r が $1[\text{\AA}]$ のとき, 電子と陽子の間にはたらくクーロン力の大きさは重力の大きさの何倍か?

	電子	陽子
質量	$m_e = 9.1 \times 10^{-31} [\text{kg}]$	$m_p = 1.7 \times 10^{-27} [\text{kg}]$
電荷	$-e = -1.6 \times 10^{-19} [\text{C}]$	$e = 1.6 \times 10^{-19} [\text{C}]$

弧度法

角度の表記法の一つ

角度 α を弧長 s と半径 r の比で定義する。
単位はラジアン (radian)。



$$360^\circ = 2\pi \text{ [radian]}$$

$$90^\circ = \pi/2 \text{ [radian]}$$

三角関数

$$c^2 = a^2 + b^2$$

正弦関数
サイン

$$\sin x = \frac{b}{c}$$

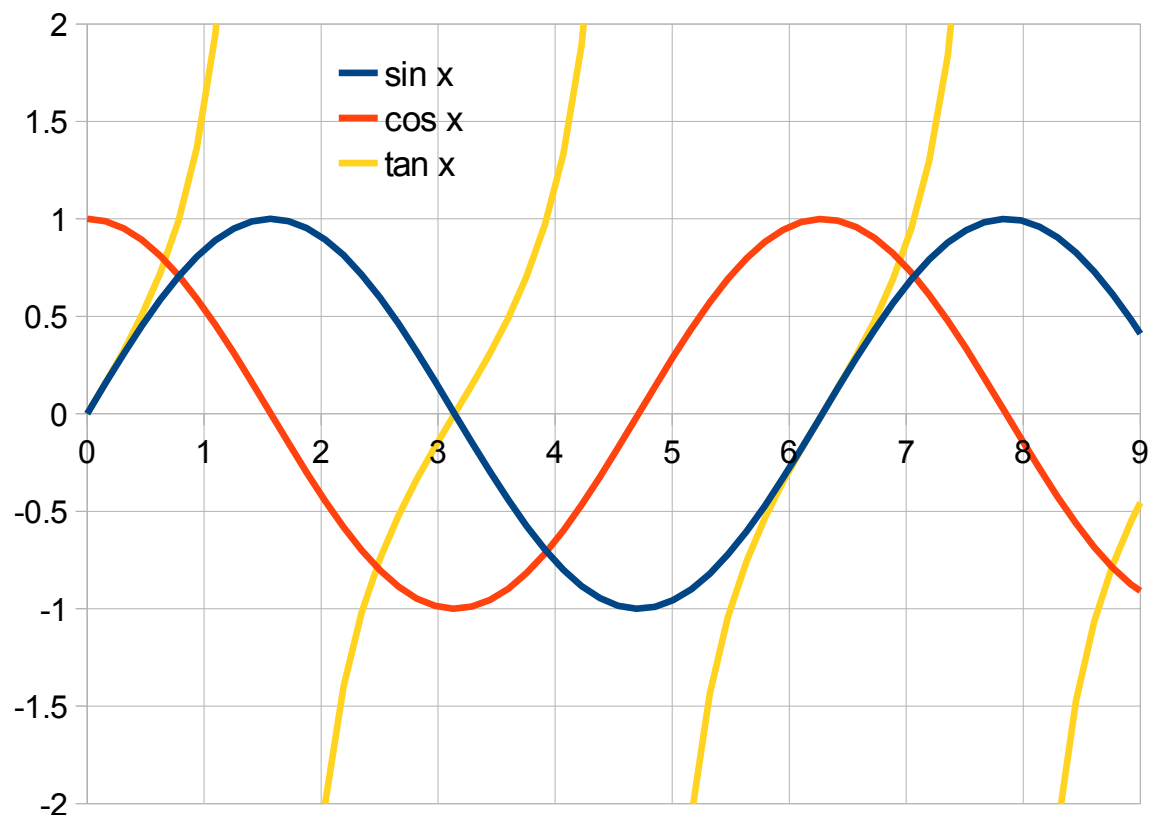
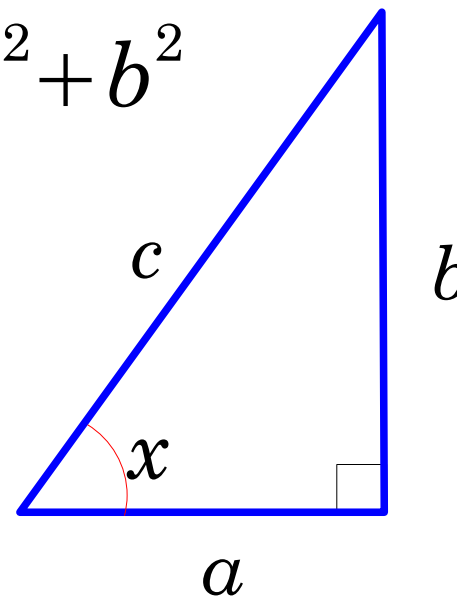
余弦関数
コサイン

$$\cos x = \frac{a}{c}$$

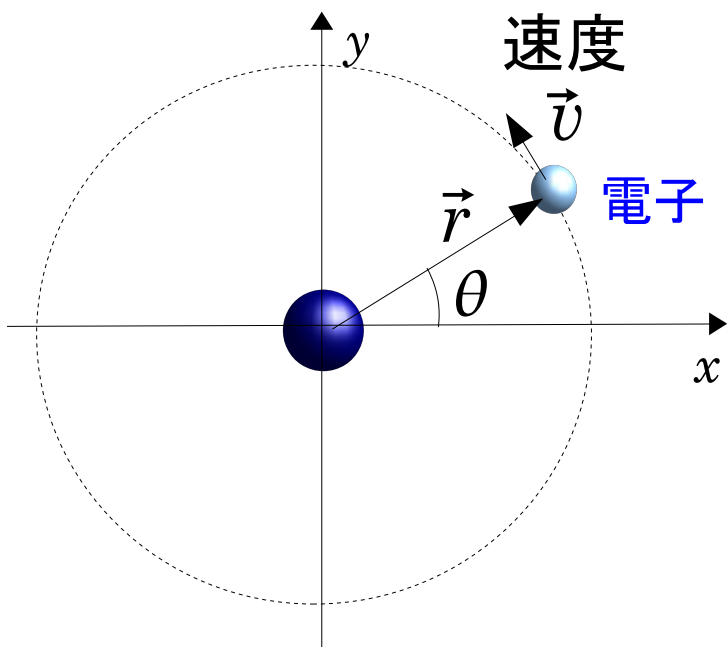
正接関数
タンジェント

$$\tan x = \frac{b}{a}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



等速円運動と向心力



電子の位置ベクトル

$$\vec{r} = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\theta = \omega t$$

↑
角速度

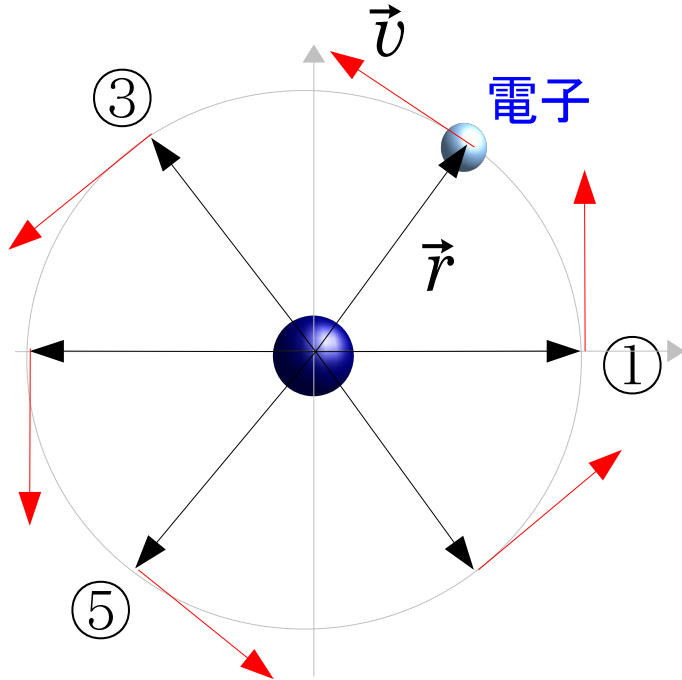
単位時間当たりの回転角度

$$\omega = \frac{v}{r} \quad \begin{array}{l} \text{速度(線速度)} \\ \text{軌道半径} \end{array}$$

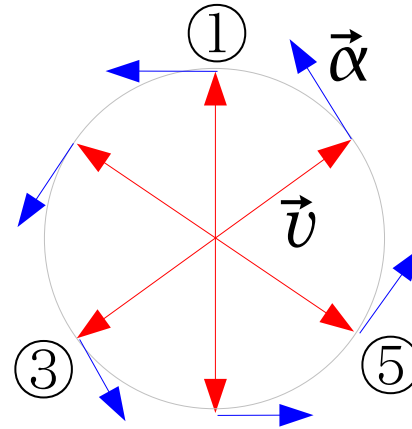
$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (\Delta t \rightarrow 0)$$

等速円運動と向心力

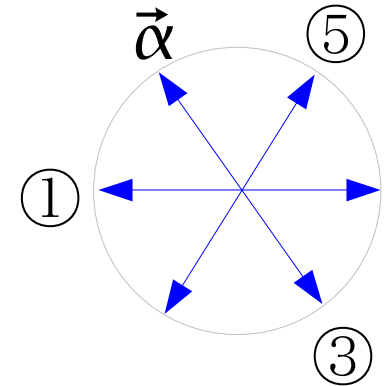
位置ベクトル



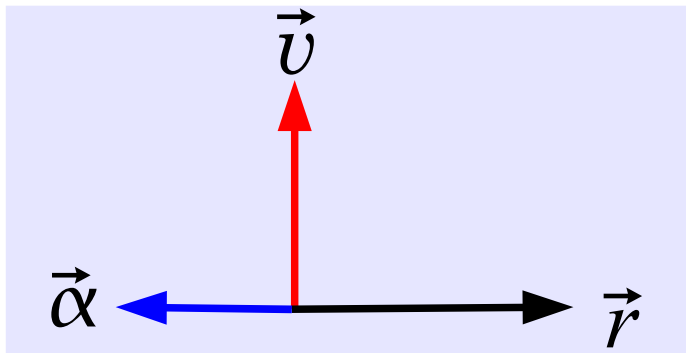
速度ベクトル



加速度ベクトル



3種のベクトルは常に直交



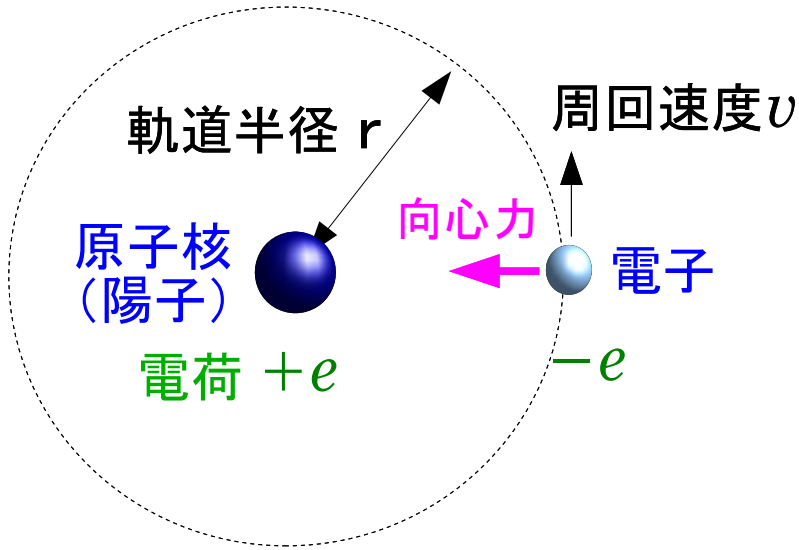
$$v = \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = r \omega$$

$$\alpha = \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = v \omega = \frac{v^2}{r}$$

向心力 $F_c = m \alpha = \frac{mv^2}{r}$

水素原子模型

(注) 重力は弱いので無視して良い



電子が円軌道を描くときの向心力

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

クーロン引力
(静電力)

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

円軌道の条件

$$F_c = F_e$$

古典力学の範囲内では、
これが電子軌道を決めるための**唯一の条件式**

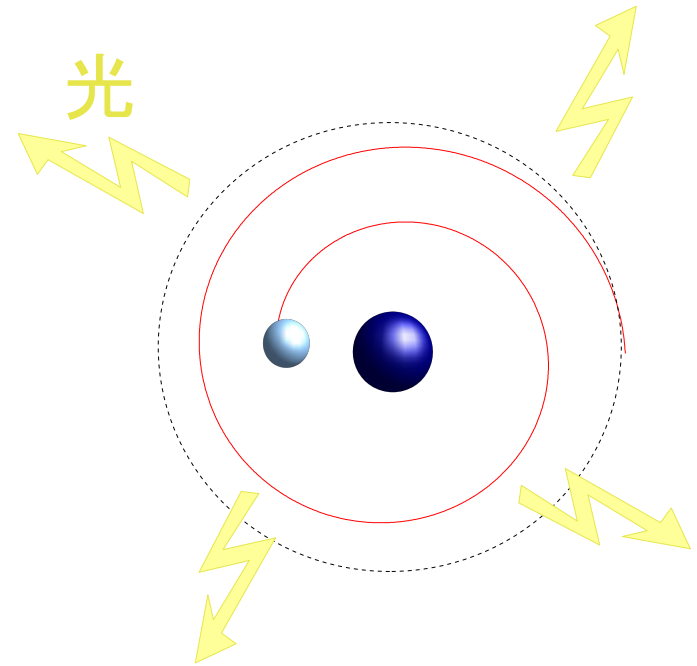
この一つの条件式だけで、二つの物理量 r , v を同時に決めることはできない。

軌道半径 r はどんな値でも取れる????

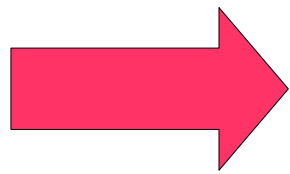
放射減衰

古典電磁気学によれば、
一般に、荷電粒子が加速度運動を
行う場合、電磁波を放出する。

応用例：送信用アンテナなど



荷電粒子は運動エネルギーを失い、
軌道半径が小さくなっていく。



太陽系型原子模型は
 秒の寿命で崩壊してしまう。

原子が安定に存在する事実を
まったく説明できない！！！！

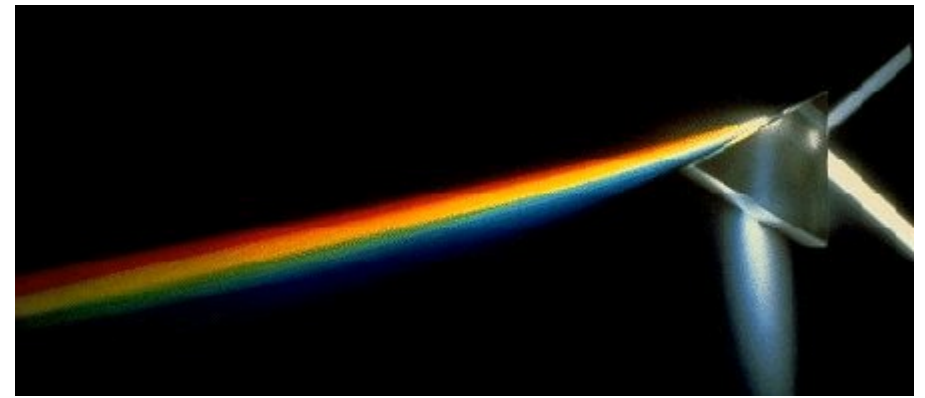
水素原子の軌道半径は
どのようにして決まっているのか？

古典力学，古典電磁気学を構成
する基本法則以外に別の**新しい**
基本法則があるのだろうか？



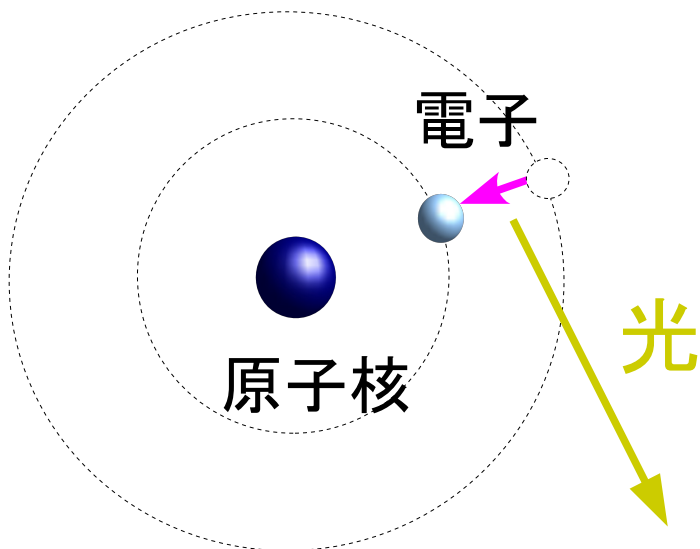
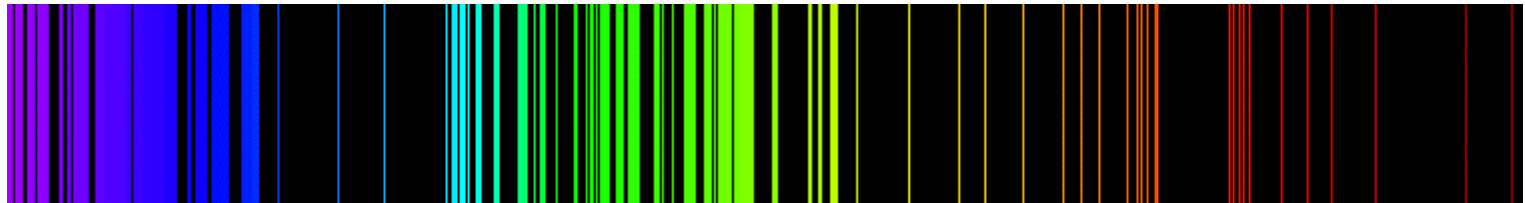
3. 掟破り

スペクトル



三角プリズムによる分光

鉄の輝線スペクトル



物質から発せられる光の振動数 f

$$f = A \times \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad n, m \text{ は整数}$$

当時, 簡単な規則性があることが
実験的に知られていた

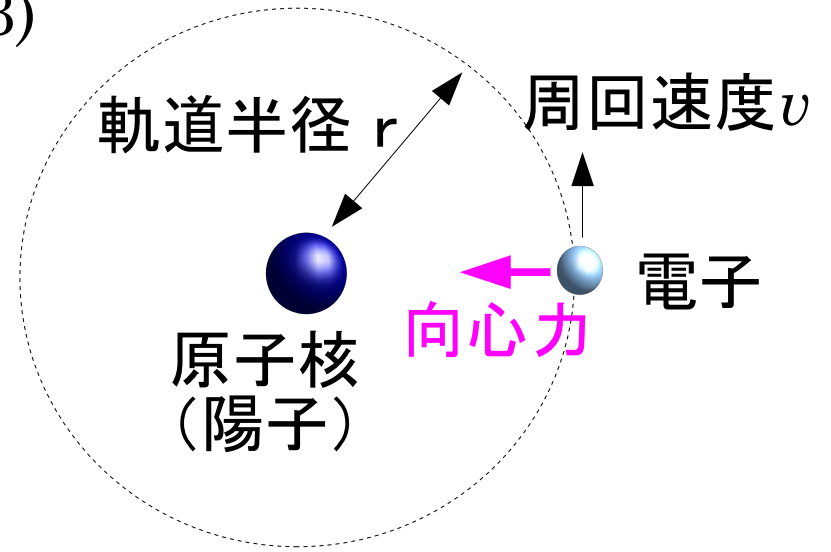


ボーアの原子模型 (1913)

N. Bohr
(1885-1962)

円軌道の条件

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \dots \textcircled{1}$$



仮定1 量子化条件

角運動量 $L (=mrv)$ はある定数の整数倍の値を取る

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad h = 6.6 \times 10^{-34} [\text{J}\cdot\text{s}]$$

プランク定数

$$L = mrv = n\hbar \dots \textcircled{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(注) 角運動量 = 回転運動の「強さ」の指標

仮定2 定常状態

量子化条件を満足する限り、電子は光を吸収・放出しない

問 ①, ②から, r, v を n の関数として求めよ.

$$\left\{ \begin{array}{l} r = a_B n^2 \\ v = \frac{\hbar}{m a_B n} \end{array} \right.$$

$$a_B =$$

ボーア半径

問 ボーア半径を数値的に求めよ

$$\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} [\text{N}^{-1} \text{m}^{-2} \text{C}^2]$$

$$h = 6.6 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}]$$

$$m = 9.1 \times 10^{-31} [\text{kg}]$$

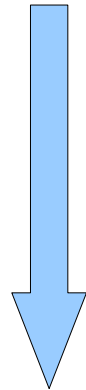
$$e = 1.6 \times 10^{-19} [\text{C}]$$

電子のエネルギー

$$E = \frac{mv^2}{2} + V(r)$$

$$V(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

位置エネルギー



$$r = a_B n^2$$

$$v = \frac{\hbar}{m a_B} \frac{1}{n}$$

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m a_B^2} \frac{1}{n^2} = E_1 \frac{1}{n^2}$$

エネルギー準位
(energy level)

n の関数であることが
はっきり分かるように
添え字をつける

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2m a_B^2}$$

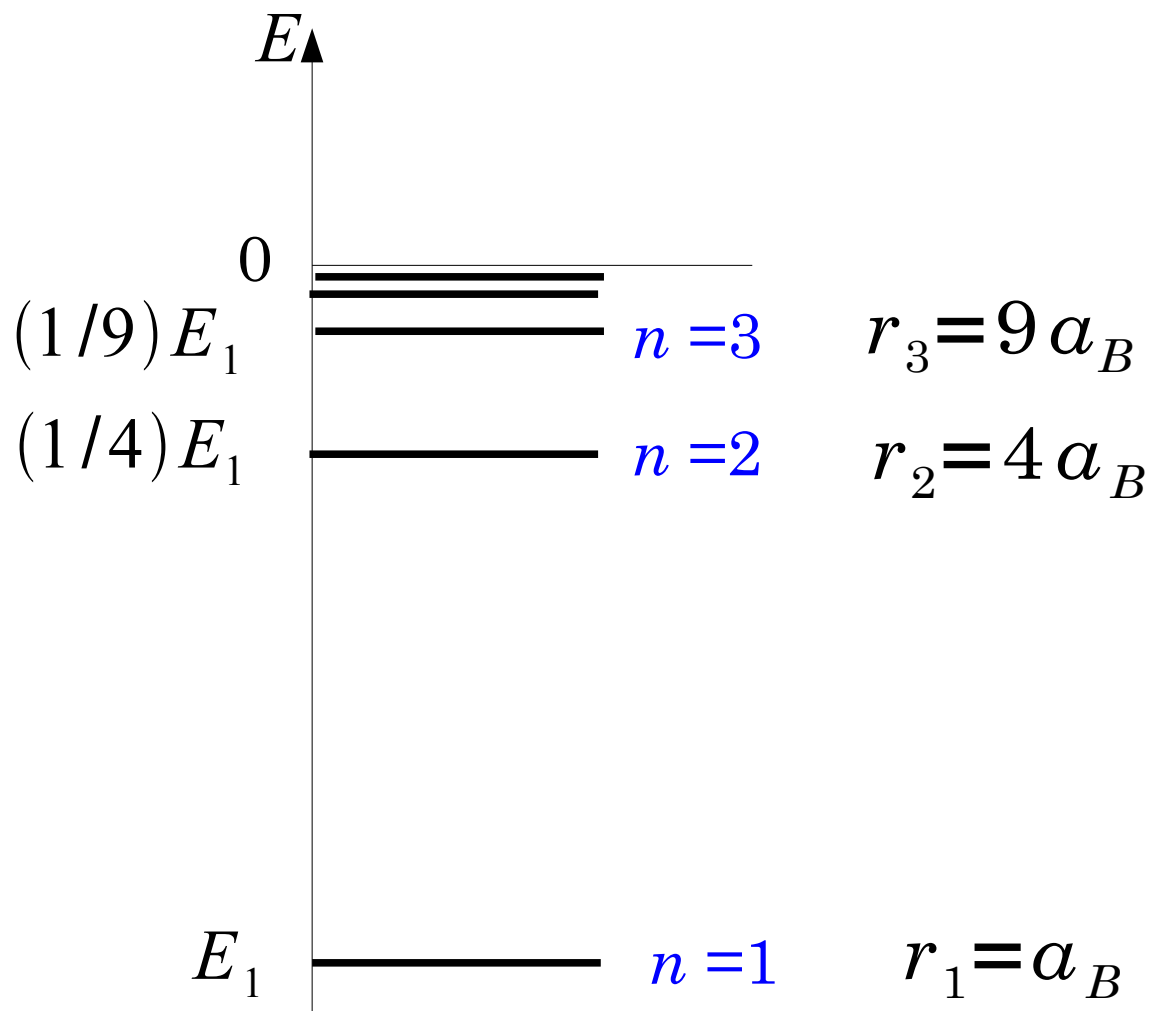
軌道半径

$$r_n = a_B n^2$$

エネルギー準位

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m a_B^2} \frac{1}{n^2} = E_1 \frac{1}{n^2}$$

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2m a_B^2}$$



問 E_1 を数値的に求めよ

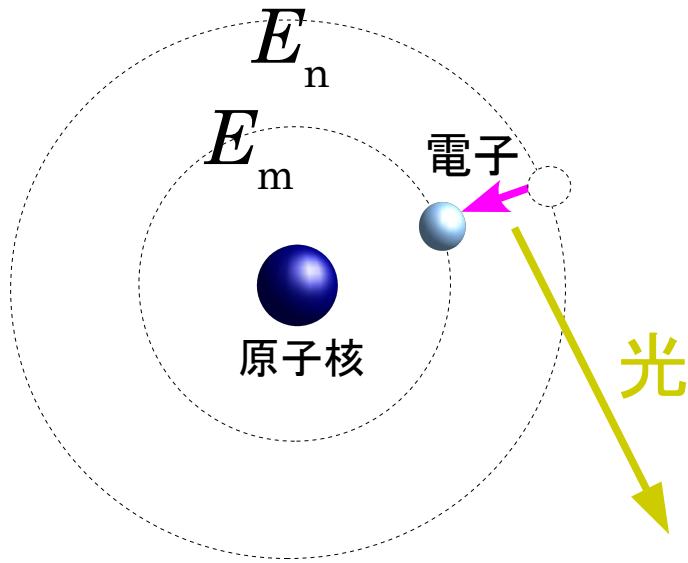
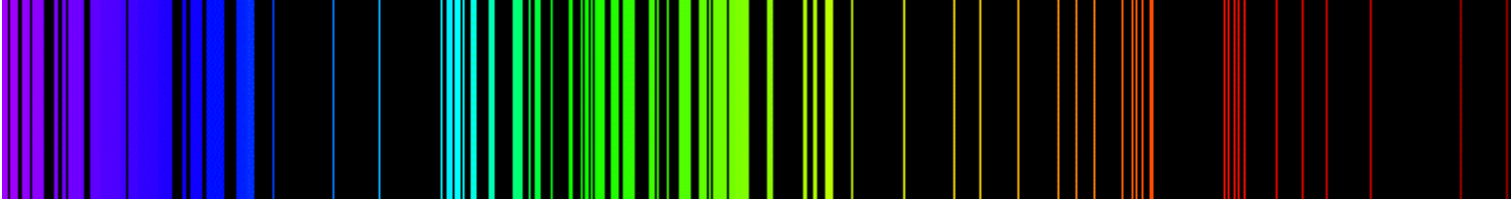
$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma_B^2} = -\frac{h^2}{8\pi^2ma_B^2}$$

$$h = 6.626 \times 10^{-34} [\text{J}\cdot\text{s}]$$

$$m = 9.110 \times 10^{-31} [\text{kg}]$$

$$a_B = 0.5292 \times 10^{-10} [\text{m}]$$

鉄の輝線スペクトル



電子がエネルギー E_n の軌道から E_m の軌道へ遷移するとき、その差分に相当するエネルギー ΔE の光が発せられる。

$$\Delta E = E_n - E_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

スペクトル分布は連続的にはならない。
この理論は、実験事実をうまく説明する。

疑問点

量子化条件は何を意味するのか？

定常状態はなぜ安定なのか？

結局、ボーアの原子模型は問題の
すり替えをしたただけではないのか？

終

次回は未定