2010年4月-6月: 力学

1. 運動の基本3法則

止まっている物体が ”動き出す ”時、その物体には何らかの ”力 ”が働いています。そのように考えると、様々な現象が一つの法則により記述でき、物体の ”運動 ”に対する理解が深まります。でも、動いているからといって必ずしもその物体に力がかかっている訳ではありません。冒頭で、”物体が動き出す時 ”と書いたのはそのことを意識したからです。例えば、電車がエンジンを切って静かに走る時と、エンジンをかけスピードを上げているときとでは運動の形態が異なることに注意して欲しいのです。

一番簡単なのは、上の例で言えば、電車がエンジンを切って静かに走る時でしょう。この時電車は速度を変えずに運動します。これを「電車は**等速運動**をする」と記述します。即ち、どんな力もかかっていない時、”止まっているものは何時までも停止し、動いているものは同じ速さで何時までも動く ”、これを「慣性の法則」(ニュートンの第1法則）と言います。物体に力が働かなければ、この様な慣性の法則が成り立つのです。

物体に力が働く場合には、物体の速度が変化するでしょう。では、速度は一体どのように変化するのか知りたくなります。力といっても色々な種類が在り、そのような色々な場合の様々な物体の運動をいちいち個別に取り扱わねばならないのでしょうか。もしそうだとしたら、お手上げです。でも、自然はよく出来たもので、それらが一つの方程式で書かれるのです。その方程式は、質量m、加速度α、力fを用いて、次のように書かれます：

$$m\alpha = f, \tag{1}$$

これは「運動の法則」（ニュートンの第2法則）と呼ばれ、物体にかかる力さえ分かれば、物体の未来の運動、即ち未来の速度や座標が全て予言できるという優れものなのです。速度とは、微少時間に変化する物体の座標変化の割合を表し、加速度とは同様に、微少時間に変化する速度変化の割合を表します。ここで”微少な時間に $\cdots$”と言ったのは、賢明な諸君にはもう御馴染みの ”微分 ”のことです。即ち、加速度α、速度vは時間t、座標xを用いて次の様な微分型に書かれます：

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}. \tag{3}$$

私達が、力学の学習で行う大まかな仕事は、与えられた力の場の中にある質点の運動を式（1）によって解き、その質点の未来の運動をを予言することなのです。

以上のことに直接関係在りませんが、力学にはもう１つ「作用・反作用の法則」（ニュートンの第３法則）があります。これは、実生活でもよく体験することで、何かを押せば、必ず押した人が同じ力で逆方向に押し返されると言うものです。

これらの知識があれば、力学はおおよそ理解できます。勿論、力はベクトルなのでベクトルについて、量子力学的思考を望むのなら力の変わりに力のポテンシャルを導入すること、運動方程式は微分方程式なので微分方程式の解法を、また運動方程式から導かれるエネルギーの保存則などを学ぶ必要が有りますが、それは、第１段階を学んだ後で、その先を学びつつ学習すればよいことです。学習に終わりは有りません。

2. 力のポテンシャル
物体の運動は「運動の法則」により記述されるのですが、そこに現れる力は扱いにくい量です。もし力を導く、またはそれに対応するエネルギーが定義できれば、速度に関係した運動エネルギーなどと共に大層役立つものと考えられます。力によるエネルギーとは、それに距離をかけたもので、**仕事**と呼ばれる量に帰着できます。しかし、注意しなければならないのは、ある状態から別の状態へと変化するときの仕事が、必ずしも道筋によらずユニークに定義できるわけではありません。勿論、それがユニークに定義される質の良い力（保存力と呼びます）はたくさん在ります。私達は、以後このような場合を主として取り扱います。そのような場合に定義される仕事を力のポテンシャル (位置エネルギー)U と呼び、力 f とは次のような関係にあります：

$$f = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}x. \tag{4}$$

3. エネルギー保存則
前にも書きましたが、運動方程式から得られる「エネルギー保存則」は力学の問題を考える時とても有用で、問題を簡単化してくれる場合が数多く有ります。その「エネルギー保存則」を運動方程式（1）から導いてみましょう。

運動方程式（1）の両辺に $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ を乗じ時間 t で積分します：

$$(\text{左辺}) = \int vm\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \;=\; m\int v\mathrm{d}v = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2), \tag{5}$$

$$(\text{右辺}) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}f\mathrm{d}t \;=\; \int f\mathrm{d}x = -\{U(x_2) - U(x_1)\}. \tag{6}$$

即ち、「運動エネルギーの変化とポテンシャルエネルギーの変化を加えると、常にゼロとなるべき」と言う、いわゆる「エネルギー保存則」が導かれたのです。

4. 簡単な例：質点の自由落下運動
運動方程式の最も簡単でポピュラーナな例は、質点の自由落下運動でしょう

か。私達が運動方程式を考える時、先ず決めねばならない量は、質点に働く力です。今の場合、地球の中心に向かう一定の力、重力です。地球の中心から外に向かって座標の正の軸を取るとその重力は、$-mg$、と書け、負の方向に一定です。力が座標 x に依らないので問題が簡単になるのです。ここで、m は質点の質量、$g(=)$ は重力の加速度と呼ばれる量です。

問題　1　重力を受けて運動する質点の運動方程式が $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -g$ と書けることを示せ。この場合、運動方程式は質量に依らない。このことは、私達に何を教えてくれるか、その例を述べよ。

問題　2　上で求めた運動方程式から速度が、$v = -gt + v_0$、と求められることを考察せよ。ただし、v_0 は質点の初速度、$t = 0$ での速度、である。

問題　3　速度は $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ とかけるので、問題 2 の答えより座標（今の場合高さ）が $x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$ と求められることを示せ。ただし、h_0 は質点の座標の初期値、$t = 0$ での高さ、である。

参考文献：

1.　世界水準の物理入門：物理チャレンジ・オリンピック日本委員会編、丸善 KK
2.　量子力学 I : 原田　勲、杉山忠男　著、講談社