関数と微分　　原田

2010年5月12日

1. 序

 ”自然と言う書物は、数学と言う言葉で書かれている ”と言ったのはガリレオ・ガリレイ（Galileo Galilei）です。

 自然、特に物理学を学ぼうとすれば、必然的に数学の素養が必要となる。数学はどうも $\cdots$ と思っている君も、自然を学ぶという目的を持って数学を学ぶと、意外にそれまでとは異なった感情を持って学べることが多いのです。”なーんだ、そういうことか ”、勿論、それでも理解しがたいことも当然数多く有るでしょう。でも、投げ出さないで、物理の現象をもう一度眺め、考えてみよう。そして、更にもう一度数学の仕組みに挑戦してみよう。新たな展開が開かれることを期待して。

2. 微分

 物理量 y は位置座標 x や時間 t を決めると、その物理量の値は決定出来る。このように、ある変数 x の値が定まると他の変数 y の値が決められる時、数学では y は x の関数であるといい、$y = f(x)$ と書く。物理量を表す関数は特別な点を除き連続である。

 さて、y と x がこのような関数関係、$y = f(x)$、にある場合を考えよう。今、x がごくわずか Δx だけ変化し、$x + \Delta x$ となった時、y はどのように変化するかを知りたい。例えば、ある時間 x における速さを考える時、時間 x がごくわずか Δx だけ変化し、$x + \Delta x$ となった時、その位置 y の変化 Δy が分かれば、速さ v は次のように求められる：$v = \Delta y/\Delta x$。一般に、、x がごくわずか Δx だけ変化した時、$y = f(x)$ がどのように変化するかは、関数の定義を用いれば良く、その変化は $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ と書ける。Δx が微少であり、$\Delta x \to 0$ を満たす時、y の変化も $\Delta f \to 0$ を満たす。その時

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \cong f^{'}(x)\Delta x, \tag{1}$$

 と書ける。$f^{'}(x)$ は $\Delta x \to 0$ の極限で次式により与えられ

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, & (2)\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, & (3)\\ &\equiv \frac{df}{dx}, & (4) \end{aligned}$$

 これを関数 $f(x)$ の導関数と呼ぶ。

3. 関数の展開

一般に関数 $f(x+\Delta x)$ を x の周りで Δx について展開することを考えよう。即ち、関数 $f(x)$ の x での値を知った上で、更に x の周りでの振る舞いを知ろうとする、欲張った考えです。でも、ある場所やある時間での物理量を知るだけでなく、その周りでどのようにその物理量が変化するかを知るのは、とてつもなく大きな発展です。点から線へ、点から面へ、点から空間への発展なのです。絵画や写真はある瞬間のものごとの切り取りですが、その前後を感じさせる絵画や写真は私達に何かを訴えてくる名品と呼ばれます。壷から流れ出る牛乳を描いたフェルメールの絵画「牛乳を注ぐ女」などはその典型例でしょうか。

そのような意識でもう一度関数の展開を眺めてみよう。

問題１ 具体的に次の関数を Δx について展開してみよう：$(x+\Delta x)^2, (x+\Delta x)^3, (x+\Delta x)^n$

$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

$(x+\Delta x)^\alpha = x^\alpha\{1+\frac{\alpha}{1!}(\Delta x/x)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(\Delta x/x)^2\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(\Delta x/x)^n+\cdots\}$

問題２　次の関数のグラフを考え、さまざまな A についてどのように図形が変化するか考えよう：

$y = Ax^2+x^4$

問題３　次の多項式の展開を考えよう：

$3(x+\Delta x)+1$

$5(x+\Delta x)^2+6(x+\Delta x)+10$

$(x+\Delta x)^3+4(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+1$

4. テーラー展開

具体的な関数の展開を経験した上で、一般論に入ろう。今、何回でも微分可能な関数 $f(x)$ があったとすると、その関数は次のような展開公式（テーラー展開）を満たす：

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x)(\Delta x)^3+\cdots \quad (5)\\ &+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\Delta x)^n+\cdots, \quad (6)\end{aligned}$$

この展開は、$f(x+\Delta x)$ の近似式を与えるもので、例えば第３項目で展開を止めると、その式は (Δx) のオーダーまで正しい値が得られる。また、展開の各次数の係数には、それに対応した階数の導関数が入っていることに注目して欲しい。ここで、$x=0$ の周りの展開を特にマクローリン展開と言う。

このマクローリン展開を具体的な関数に当てはめて展開した例を以下に示す：

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, & (7)\\
\exp(ix) &= \cos x + i \sin x & (8)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} & (9)\\
&+ i(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}). & (10)\\
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. & (11)
\end{aligned}$$

問題１　この展開とオイラーの公式より、３角関数の展開式が導かれる。正弦関数、余弦関数のマクローリン展開を求めよ。