関数と微分　　原田

2010年5月

1. 序

　"自然と言う書物は、数学と言う言葉で書かれている"と言ったのはガリレオ・ガリレイ（Galileo Galilei）です。

自然、特に物理学を学ぼうとすれば、必然的に数学の素養が必要となる。数学はどうも … と思っている君も、自然を学ぶという目的を持って数学を学ぶと、意外にそれまでとは異なった感情を持って学べることが多いのです。"なーんだ、そういうことか"、勿論、それでも理解しがたいことも当然数多く有るでしょう。でも、投げ出さないで、物理の現象をもう一度眺め、考えてみよう。そして、更にもう一度数学の仕組みに挑戦してみよう。新たな展開が開かれることを期待して。

2. 微分

物理量 y は位置座標 x や時間 t を決めると、その物理量の値は決定出来る。このように、ある変数 x の値が定まると他の変数 y の値が決められる時、数学では y は x の関数であるといい、$y = f(x)$ と書く。物理量を表す関数は特別な点を除き連続である。

さて、y と x がこのような関数関係、$y = f(x)$、にある場合を考えよう。今、x がごくわずか Δx だけ変化し、$x + \Delta x$ となった時、y はどのように変化するかを知りたい。例えば、ある時間 x における速さを考える時、時間 x がごくわずか Δx だけ変化し、$x + \Delta x$ となった時、その位置 y の変化 Δy が分かれば、速さ v は次のように求められる：$v = \Delta y/\Delta x$。一般に、、x がごくわずか Δx だけ変化した時、$y = f(x)$ がどのように変化するかは、関数の定義を用いれば良く、その変化は $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ と書ける。Δx が微少であり、$\Delta x \to 0$ を満たす時、y の変化も $\Delta f \to 0$ を満たす。その時

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \cong f^{'}(x)\Delta x, \tag{1}$$

と書ける。$f^{'}(x)$ は $\Delta x \to 0$ の極限で次式により与えられ

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, & (2)\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, & (3)\\ &\equiv \frac{df}{dx}, & (4) \end{aligned}$$

これを関数 $f(x)$ の導関数と呼ぶ。
このように、点 $x+\Delta x$ における $f(x+\Delta x)$ は点 x における $f(x)$ および $f'(x)$ が分かれば、次式のように表される。

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + O((\Delta x)^2). \tag{5}$$

ここで、$O((\Delta x)^2)$ は微少量 Δx の２次以上の寄与である。従って、１階の微分を求めたければ、$f(x+\Delta x)$ を微少量 Δx で展開し、その１次の係数を求めればよいことが分かる。

問題１ 上の１階の導関数の定義に従い、２階の導関数 $f''(x)$ の定義式を書け。
問題２　次の関数の A の値を様々に変化させた時（特に符号などに注意)、y の図形がどのように変化するかを微分を用いて考えよ：
$y = Ax^2 + x^4$

3. 関数の展開

一般に関数 $f(x+\Delta x)$ を x の周りで Δx について展開することを考えよう。即ち、関数 $f(x)$ の x での値を知った上で、更に x の周りでの振る舞いを知ろうとする、欲張った考えです。ある人はそのことを ”一を聞いて十を知る ” と言いました。私はその言葉をとても気に入っています。（でも私の学生はそのことを言うと、先生、今の学生は、”十を聞いて一を知る ”ですから注意してくださいと警告されました。そんなこと無いよね！）ある場所やある時間での物理量を知るだけでなく、その周りでどのようにその物理量が変化するかを知るのは、とてつもなく大きな発展です。点から線へ、点から面へ、点から空間への発展なのです。絵画や写真はある瞬間のものごとの切り取りですが、その前後を感じさせる絵画や写真は私達に何かを訴えてくる名品と呼ばれます。壷から流れ出る牛乳を描いたフェルメールの絵画「牛乳を注ぐ女」などはその典型例でしょうか。
そのような意識でもう一度関数の展開を眺めてみよう。
問題１ 具体的に次の関数を Δx について展開してみよう：
$(x+\Delta x)^2, (x+\Delta x)^5, (x+\Delta x)^n$
ヒント 1）$x^m \Delta x^{n-m}$ の係数がどのように書けるか考えよう。
ヒント 2）一般には次のような展開式 (二項展開) が知られている：
$(x+\Delta x)^\alpha = x^\alpha\{1+\frac{\alpha}{1!}(\Delta x/x)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(\Delta x/x)^2 \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(\Delta x/x)^n + \cdots\}$
問題２　問題１ c) より、$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$　を示せ。
問題３ 次の多項式の展開を考えよう：
$3(x+\Delta x)+1$

$5(x+\Delta x)^2+6(x+\Delta x)+10$
$(x+\Delta x)^3+4(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+1$
問題4　一般に関数 $f(x+\Delta x)$ を Δx について展開することを考えよう。ただし、関数 $f(x)$ は何回でも微分可能とする。
式（5）を更に高次まで展開し

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f^{'}(x)\Delta x + g(x)(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3). \tag{6}$$

この式の $g(x)$ を求めよ。
ヒント）このために、式（6）において $x => x+\Delta x$ とし、$f(x+2\Delta x)$ の Δx についての展開を考えよ。
問題5: 以上のような考察から、次式を導出せよ。

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x) + f^{'}(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f^{''}(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)(\Delta x)^3 + \cdots & (7) \\ &+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\Delta x)^n + \cdots. & (8) \end{aligned}$$

4. テーラー展開
式（8）において、$x => a, \Delta x => x-a$ に置き換えると、次のテーラー展開が導かれる：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{''}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \cdot & (9) \\ &+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots, & \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. & (10) \end{aligned}$$

この展開は、$f(x)$ の a の周りでの近似式を与えるもので、例えば第３項目で展開を止めると、その式は $(x-a)^2$ のオーダーまで正しい値が得られる。また、展開の各次数の係数には、それに対応した階数の導関数が入っていることに注目して欲しい。ここで、$a=0$ 点の周りの展開を特にマクローリン展開と言う。

このマクローリン展開を具体的な関数に当てはめて展開した例を以下に示す：

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, & (11) \\ \exp(ix) &= \cos x + i \sin x & (12) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} & (13) \\ &+ i(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}). & (14) \end{aligned}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \tag{15}$$

問題１　この展開とオイラーの公式より、３角関数の展開式が導かれる。正弦関数 (sin)、余弦関数 (cos) のマクローリン展開を求めよ。
問題 2: 微分の応用例として以下の級数和、積分を求めよ。
a) 級数和；$\sum_0^\infty nx^n, |x| < 1.$ ただし、$\sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}.$
b) 積分；　$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(\alpha x^2)\mathrm{d}x.$ ただし、$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\alpha x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/\alpha}$

5. 積分
微分、即ち導関数が定義されると、それに対応する不定積分が次のように定義される：

$$\int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(x), \tag{16}$$

定積分で書くと

$$\int_{x_0}^{x} f'(x)\mathrm{d}x = f(x) - f(x_0). \tag{17}$$

この式は、次のようなことを教えてくれる。即ち、$x = x_0$ での値（初期値）が分かると、それより手前、またはそれより先の $f(x)$ の値が全て分かってしまうのである。これこそ、”十を聞いて一を知る ”の真髄である。これらの式を用いて、以下、微分方程式の解を求めよう。

6. 微分方程式
導関数を含んだ方程式を ”微分方程式 ”と呼ぶ。例えば、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ は微分方程式であるが、この方程式の解は $y = const$ と容易にわかる。微分の操作を知っていれば、微分して 0 になるのは y が x に依らないからであると。このように、微分方程式の解法は理づめというよりむしろ発見的（heuristic）と言われる所以である。勿論、階数が低い微分方程式には解法が用意されている。以後それらの幾つかを見てみよう。

(a) 変数分離型

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y), \tag{18}$$

と書かれる場合、この微分方程式は変数分離型と呼ばれ、以下のように解くことが出来る。即ち、両辺に $g(y)^{-1}$ を乗じ、x で積分する：

$$\int g(y)^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \tag{19}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x. \tag{20}$$

両辺の積分が出来れば、解 y が求められる。
問題 1　次の微分方程式を解け：

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c,$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -cx,$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -xy.$

(b) 線形微分方程式

次の形の方程式を、線形微分方程式と呼ぶ。この形はとても単純であるが、物理の様々な場面に登場するので、良くその解法を理解して欲しい：

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + g_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + g_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + g_0(x)y = h(x), \tag{21}$$

ここで、$h(x) = 0$ の時、この方程式を斉次方程式、$h(x) \neq 0$ の時、この方程式を非斉次方程式という。非斉次方程式の解は、斉次方程式の解よりも止められるので、ここでは先ず斉次方程式の解法を学ぼう。

一般にｎ回の常微分方程式の**一般解**はｎ個の任意定数を含んでいなければならない。物理の問題は、一般解を求めるだけでは解が特定できないので、ｎ個の初期値を与えてこれらの任意定数を決定しユニークな解として初めて意味あるものになる。この解を**特解**と呼ぶ。

問題を具体的にするために、次の２階の係数が定数の線型方程式を考えよう。一般に、n 階の定数係数の線型方程式の解は２階の方程式の解法を理解すれば、自ずとその拡張が見えてくるであろう：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + qy = r. \tag{22}$$

ここで p, q, r は定数と仮定する。

i. 簡単な例（$p = q = 0, r = -mg$ の場合）

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -mg. \tag{23}$$

これは重力中にある質点の運動方程式で、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g$ とも書き直せる。この方程式の解は、境界条件（$t = 0$ の時、$v = 0$）を考慮して、$v = -gt$ と求められる。

ii. 抵抗力 $(-mav)$ が働く場合（$p = 0, q = mav, r = -mg$ の場合）

質点が空気中を落下する場合などで、その速度があまり速くない時、抵抗力は運動を妨げる方向に、大きさは速さに比例する。その場合、運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - mav, \tag{24}$$

と書ける。従って、その解は次の積分を実行すれば求まる：

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{av+g} = -\int \mathrm{d}t. \tag{25}$$

この積分は、$\log|av+g| = -at + C$ となり、$t=0$ での速度を v_0 とすることにより、$v(t) = \frac{g}{a}(e^{-at}-1) + v_0 e^{-at}$ と求まる。（この積分は、公式集を参考にされたい。）この解は、$t \to \infty$ の時、一定の速度 $v = -g/a$ になることを教えており、この速度を終端速度と言う。これは、十分時間が経つと、抵抗力が重力とつりあい、質点には力が働かない状態となり、等速運動になるのである。私達が地上で見る雨粒も、このような状態にあると考えられている。

さて、特別な例から離れて、元の方程式に戻ろう。まず、$r=0$ の場合（斉次方程式と言う）を考えよう。解の形を $y = \exp(\alpha x)$ と置き、これを式（22）に代入して α を求めてみよう。この解の形を代入すると、α を決める式は

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \tag{26}$$

となり、この２次式より、α が次のように求められる：

$$\alpha = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2-4q}). \tag{27}$$

従って、２つの解

$$y = \exp\frac{x}{2}(-p \pm \sqrt{p^2-4q}), \tag{28}$$

が求まった。微分方程式論では、「２階の微分方程式は２つの独立な解を持ち、その一般解は２つの任意定数を用いて重ねあわせたものである」ことが知られているので、微分方程式（22）の解は次のように書ける：

$$y = C_1 \exp\frac{x}{2}(-p + \sqrt{p^2-4q}) + C_2 \exp\frac{x}{2}(-p - \sqrt{p^2-4q}). \tag{29}$$

賢明な皆さんは、ここで１つの疑問に出会うであろう。即ち、平方根の中が正の数とは限らないことである。正の場合は２つの減衰定数を持った指数関数の和として表される。一方、負あるいは0であるときはどのように処置すれば良いのか。０である場合は別の取り扱いが必要なので、本講座では省略することにする。負の時は、そうです、ここで複素数が登場するのです。$p^2 - 4q < 0$ の時、その解は

$$y = C_1 \exp\frac{x}{2}\{-p + i\sqrt{4q-p^2}\} + C_2 \exp\frac{x}{2}\{(-p - i\sqrt{4q-p^2}\}, \tag{30}$$

とかける。でも一体このことは、物理としてどのようなことを暗示しているのでしょうか。両者の場合で、運動がとても変わってしまうので

す。そのことを少し見てみよう。式（30）は、次のように書き換えられます：

$$y = \exp(-px/2)\{A\sin(\frac{x}{2}\sqrt{4q-p^2}) + B\cos(\frac{x}{2}\sqrt{4q-p^2})\}, \tag{31}$$

式（26）の解は単調に減衰（増加の場合もある）するのですが、式（31）の解は振動しながら減衰し、式（29）とは異なった振る舞いを示すのです。

ここで、簡単な場合を考察し、その性質を十分理解しよう。即ち、単振動と呼ばれる場合で、質量 m の質点にフックの力 $-kx$（k はバネ定数）が働く場合です。式（22）の例では、x を時間 t と取り、$p = 0, q = k/m, r = 0$ と置いた場合です。さらに、$\omega^2 = k/m$ と置き換えると、解（31）は

$$y(t) = \{A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\}, \tag{32}$$

と書ける。また、$A = C\cos\delta, B = C\sin\delta$ と置けば、

$$y(t) = C\sin(\omega t + \delta), \tag{33}$$

と表され、C を振幅、δ を初期位相、ω を角振動数、$T = 2\pi/\omega$ を周期という。