

このファイルは科学大好き岡山クラブにおいて2008.6.21(土)に約2時間をかけて行った授業の資料を元にしてあります。

その授業に出席した人にとっては、新しい内容ではありませんが、復習だと思ってもう一度目を通してください。

なお、中学2年生程度の数学を前提にしていますので、それ以下の学年の皆さんにとってはかなり難しいと思います。しかも説明用の資料だけを読んで内容を理解するのは大変難しいことだと思います。が、少しチャレンジしてみてください。

今回、全部を理解できなくても気にしないで下さい。  
時間が経てば少しずつ理解できる部分が増えてきますから。

ファイルに目を通して質問1～5に答えてください。

できる範囲で構いません。

途中で分からなくなったり人は、何ページ目ぐらいから分からなくなったりか教えてください。

期日:11月7日

# 数学と理科の接点

## その1

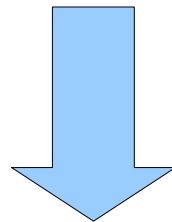
「中学生にわかる微積分学」

岡田耕三  
(岡山大学大学院自然科学研究科)



# 今日の予定

「速さ」についての復習  
(多分, 小学生レベル)



微分係数、微分  
(高校数学Ⅱレベル)

# 速さの話



# 速さ(speed)

単位時間あたりに進む道のり

時速100km  
(毎時100km)

1時間で100km進む

分速10m  
(毎分10m)

1分間で10m進む

秒速8km  
(毎秒8km)

1秒間で8km進む

■ 時速4km で3時間歩くと 12 km 進む.

■ 時速 5 kmで4時間歩くと20km進む.

$$\frac{20\text{km}}{4\text{時間}} = 5 \frac{\text{km}}{\text{時間}}$$
$$= 5 \text{ km/時}$$

時間 → hour

= 5 km/h とも書きます



**単位**のことを常に意識する習慣をつけましょう

問：地球は自転しています。では、赤道上に立っている人の速さは？

地球の赤道半径 = 約6400km、 直径×3.14=円周

地球円周 = 約  km

24時間で地球1周するのだから

速さは = 約  km/時

(注)

15 C° の空気中での音速

= 約 340 m/s (= 1225 km/h)



問1: 地球は公転しています.  
平均公転半径は約1億5000万km  
です. 地球の時速を計算して下さい.



時 = hour

時速5km = 5 km/h

分 = minute

分速5km = 5 km/min

秒 = second

秒速5km = 5 km/s  
= 5 km/sec



(出典: Wikipedia)

km/h の表示がある



(出典: Wikipedia)

岡山-新大阪  
180km (新幹線)  
所要時間 44分

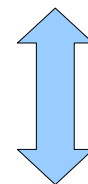
### 第1経路

所要時間 44分  
乗車キロ 180.3 km  
合計 6060円  
定期 一ヶ月 130140円

乗換	着発	所要	駅名/路線・列車名	運賃
	15:14		岡山	
	◎	44分	新幹線のぞみ32号	2940円
	15:58		新大阪	

<http://www.hyperdia.com/>

$$\text{分速} = \frac{180\text{km}}{44\text{分}} = 4.1 \text{ km/分}$$



同じ速さ

$$\text{時速} = 4.1 \times 60 = 246 \text{ km/時}$$

のぞみ号の速度  $246\text{km/h}$  は、  
のぞみ号が実際に1時間に  
走った道のりを調べなくても  
計算できる。

1秒間に走る道のりが分かれば，時速は計算できる．

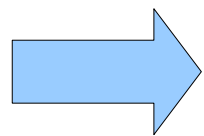
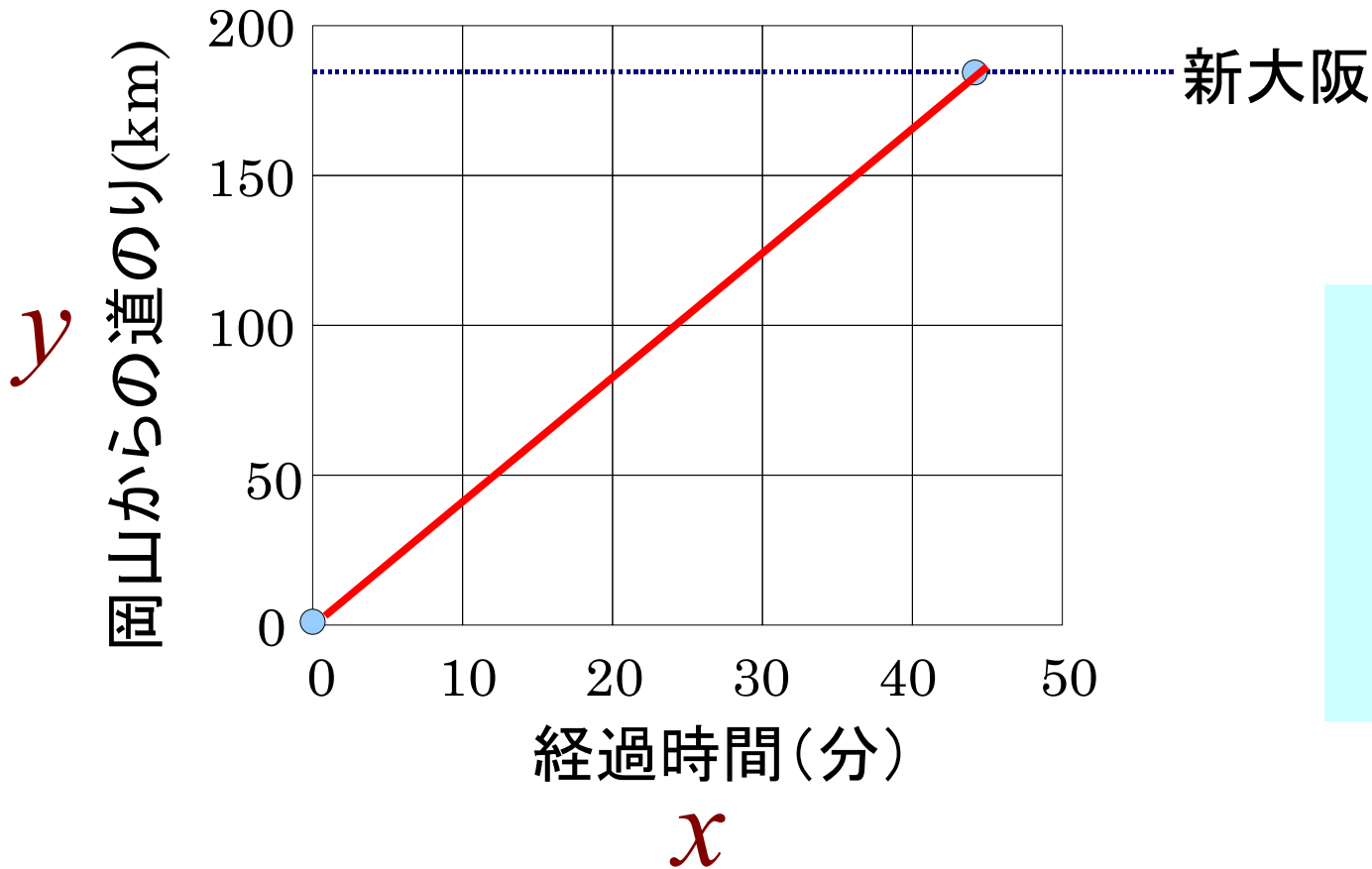
0.1秒間に走る道のりが分かれば，時速は計算できる．

0.01秒間に走る道のりが分かれば，……

……

のぞみ号が走った道のりと時間との比 が分かれば，のぞみ号の速さは分かる．

**問** のぞみ号が分速4.1kmの一定の速さで岡山から新大阪へ向かっているとします。  
岡山を出発してからの経過時間と道のりの関係をグラフにしてください。（新神戸には停車しないとします）



$$y = 4.1x \quad (x \text{ に関する1次関数})$$

直線の傾きが速さを与える。

## 問2

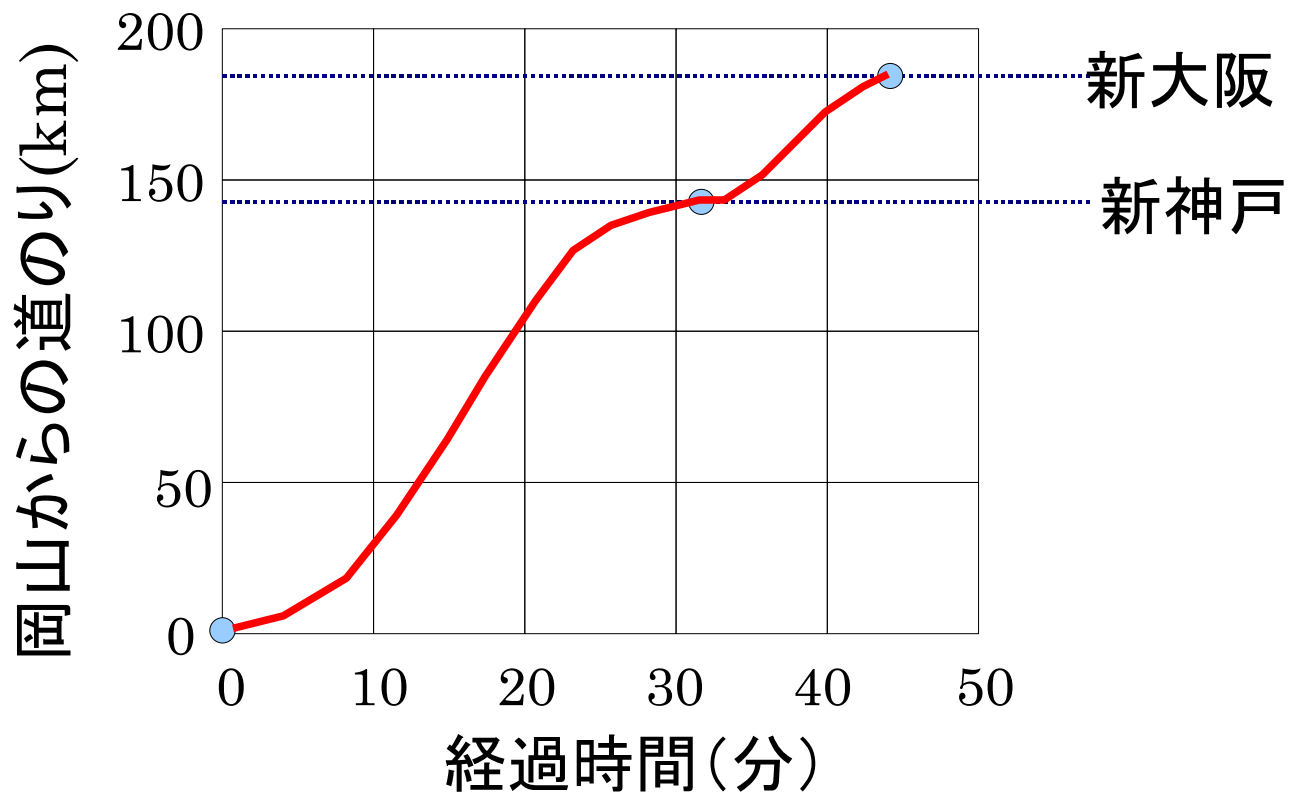
のぞみ号が分速4.1kmの一定の速さで走っているとするとときに、15分間にのぞみ号が走る距離を求めて下さい。

ホントののぞみ号の運行は  
1次関数っぽいだろうか？

駅を出発するとき、  
到着するとき、  
列車の速さはどうかな？

岡山駅を出発し，新神戸駅で停車し，新大阪駅へ到着するまでの様子をグラフにしてみよう。  
加速，減速も考えよう

岡山 --- 新神戸	---	新大阪	(のぞみ)
143km		37km	
32分		12分	

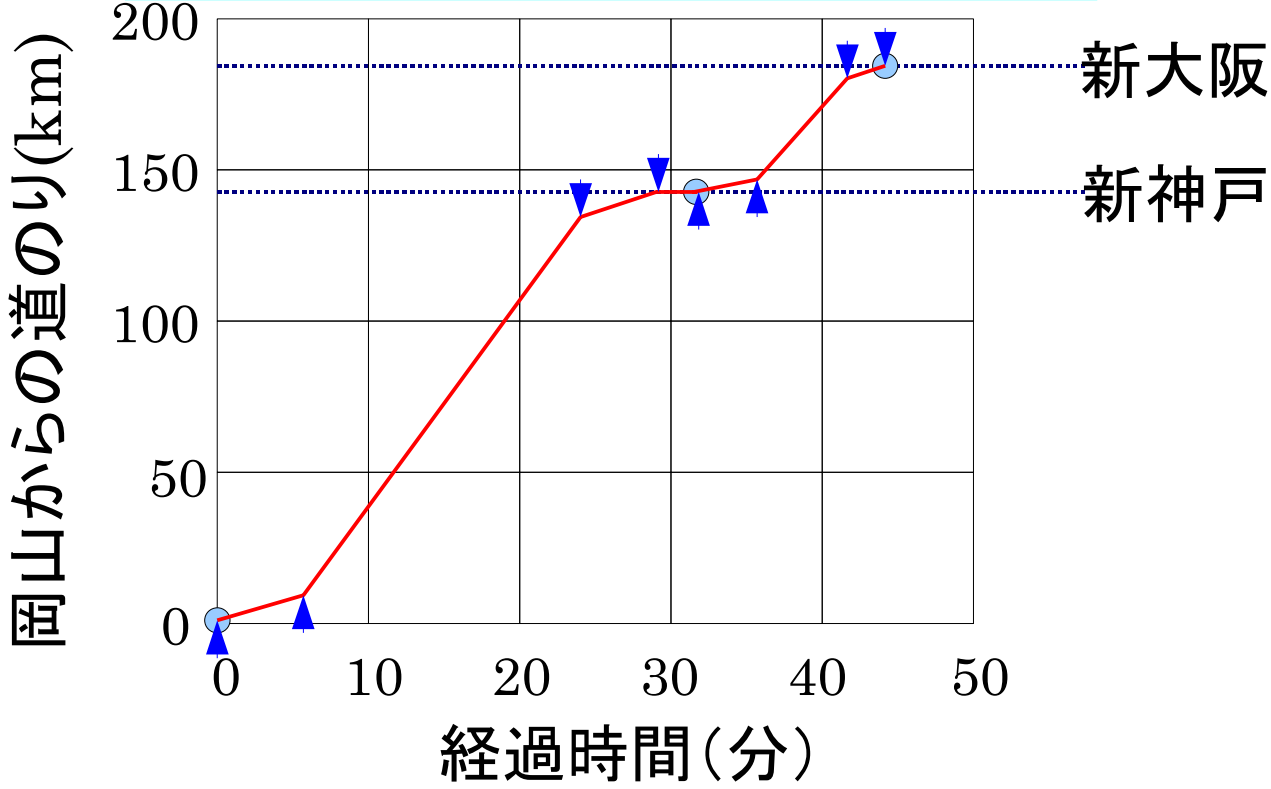




# 少し簡単化しました

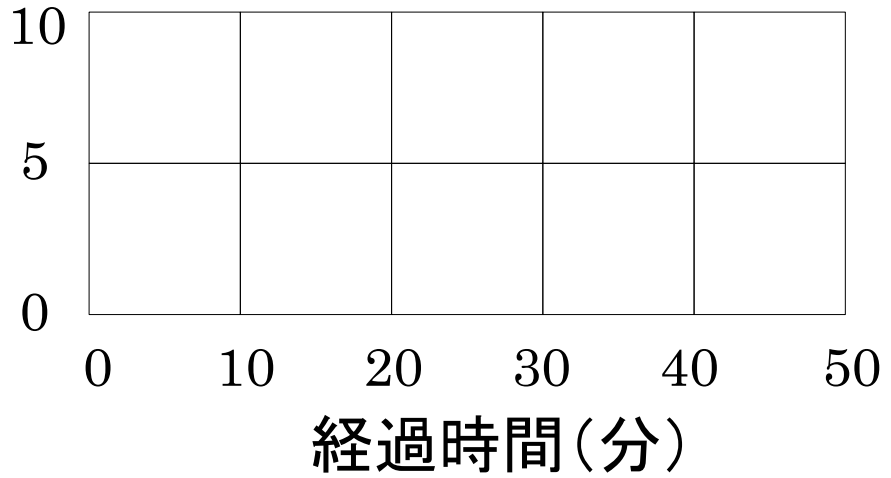
岡山 --- 新神戸 --- 新大阪  
143km      37km  
32分        12分

(注)  
矢印は速度を変化させた時刻を表しています。



のぞみ号の速さの時間変化を調べてください。

速さ  
km/分



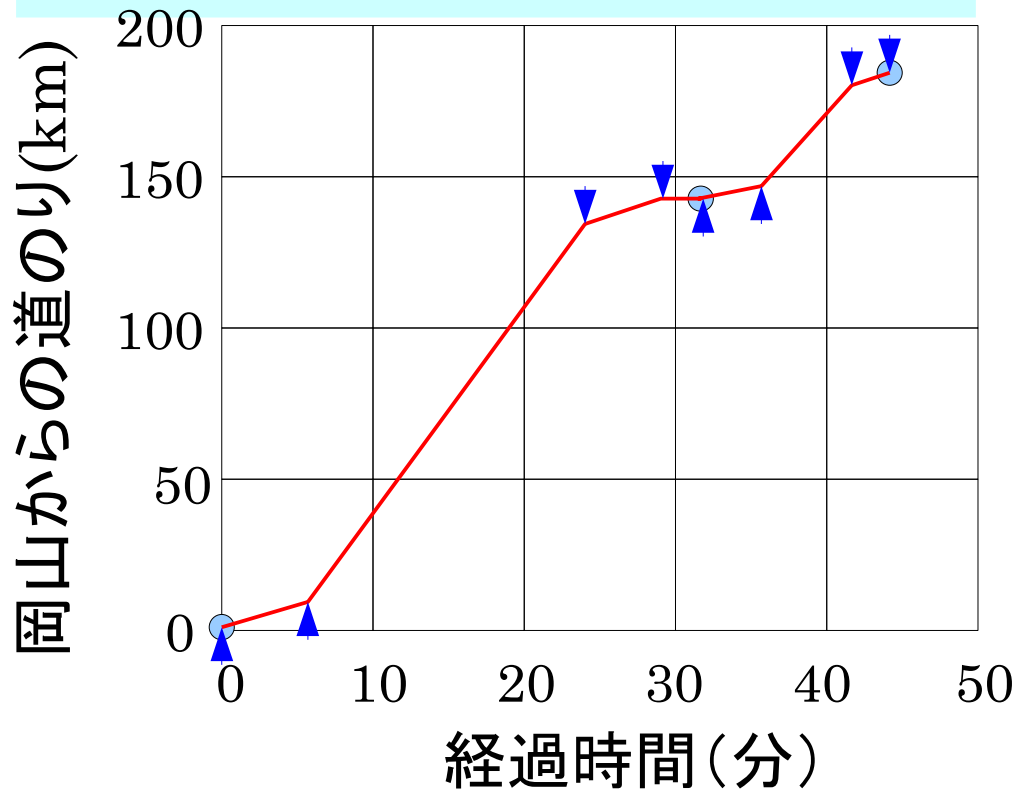
岡山 --- 新神戸 --- 新大阪

143km

37km

32分

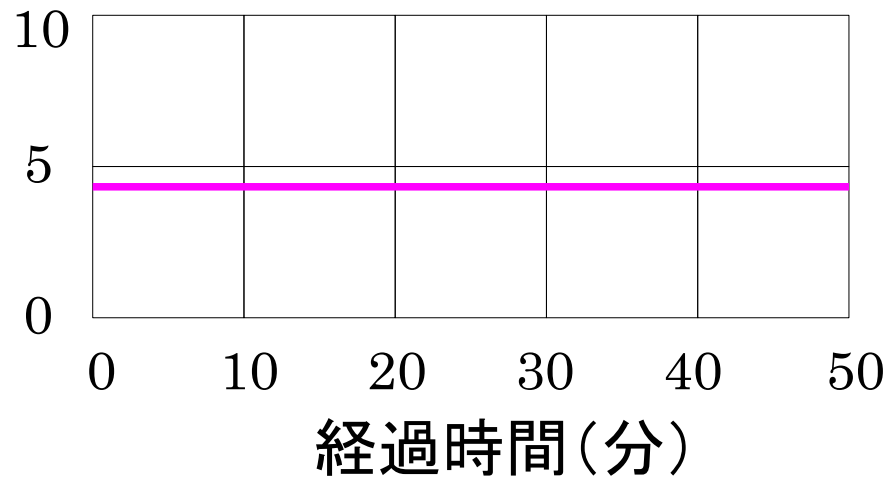
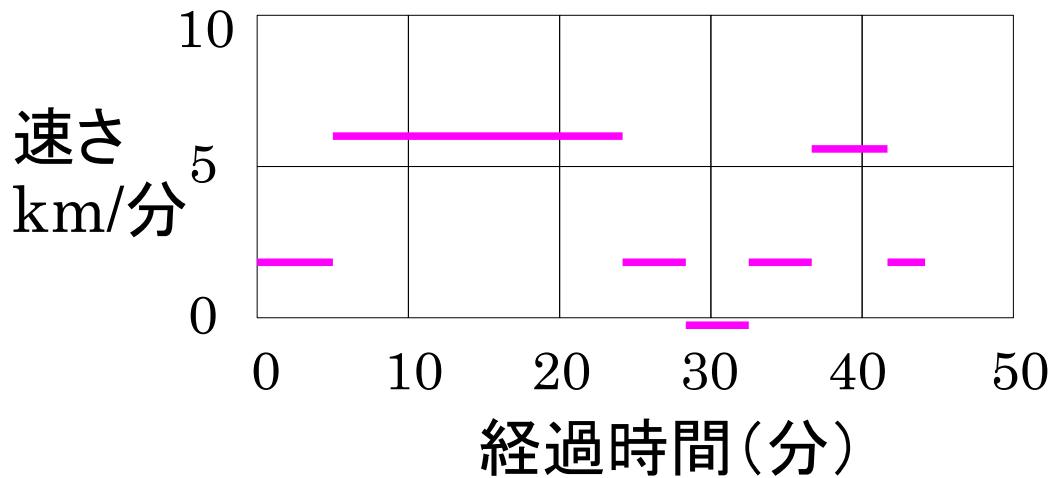
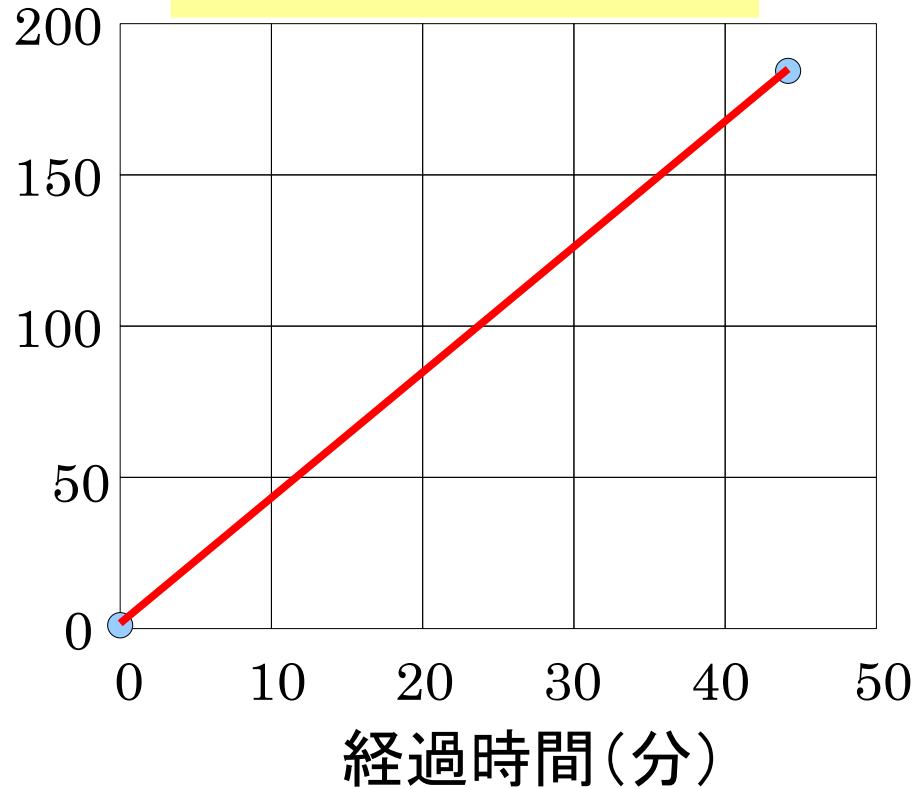
12分

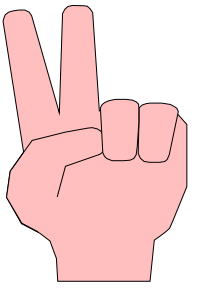


岡山 --- 新大阪

180km

44分





速さは  
「時間-道のり」グラフの傾き



「時間-道のり」が折れ線に  
なると、速さも時間変化する

休憩？



これまでに、「道のり-時間」のグラフの傾きは速さになることを学びました。

「道のり-時間」のグラフが折れ曲がっていると、その折れ曲がりの時間で速さも変化することがわかりました。

では、  
「道のり-時間」の関係がなめらかな  
曲線グラフのとき、どうなるかな？

速さが刻々と時間変化しそうです。  
どうすれば速さをきちんと求めることが  
できるでしょう？

## (補足) 2次関数

$$y = 5x + 3$$

$x$ の1次関数の例

$$y = 3x^2 + 5x + 3$$

$x$ の2次関数の例.

$x^2$ の項が含まれているので2次関数と呼ぶ.



$x^2$  は  $x \times x$  の意味

$x^4$  は  $x \times x \times x \times x$  の意味

$x$ を4回掛け合わせる

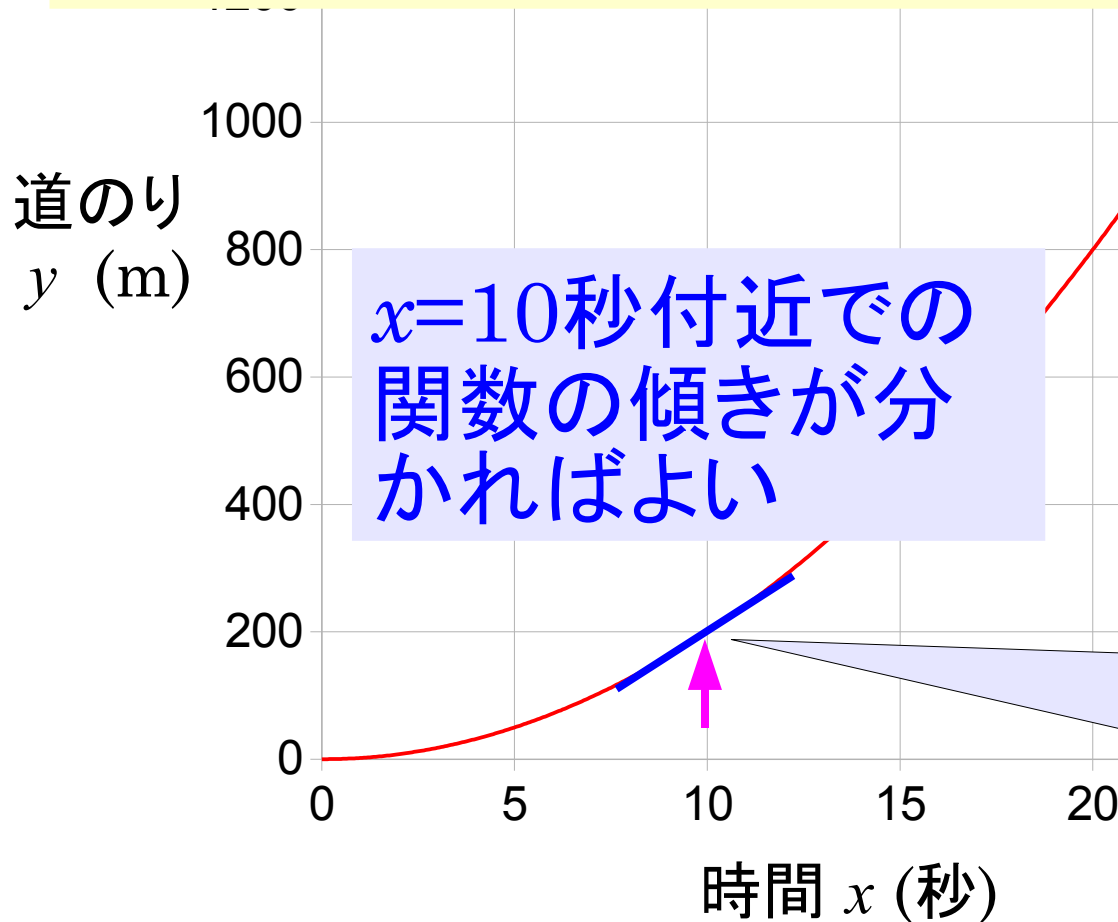
## 例題 1

# 「時間-道のり」が2次関数のときはどうなるかな？

例えば、「 $x=10$ 秒のときの速さ」はどうすれば求まるのだろうか？

2次関数のとき

$$y = 2x^2$$



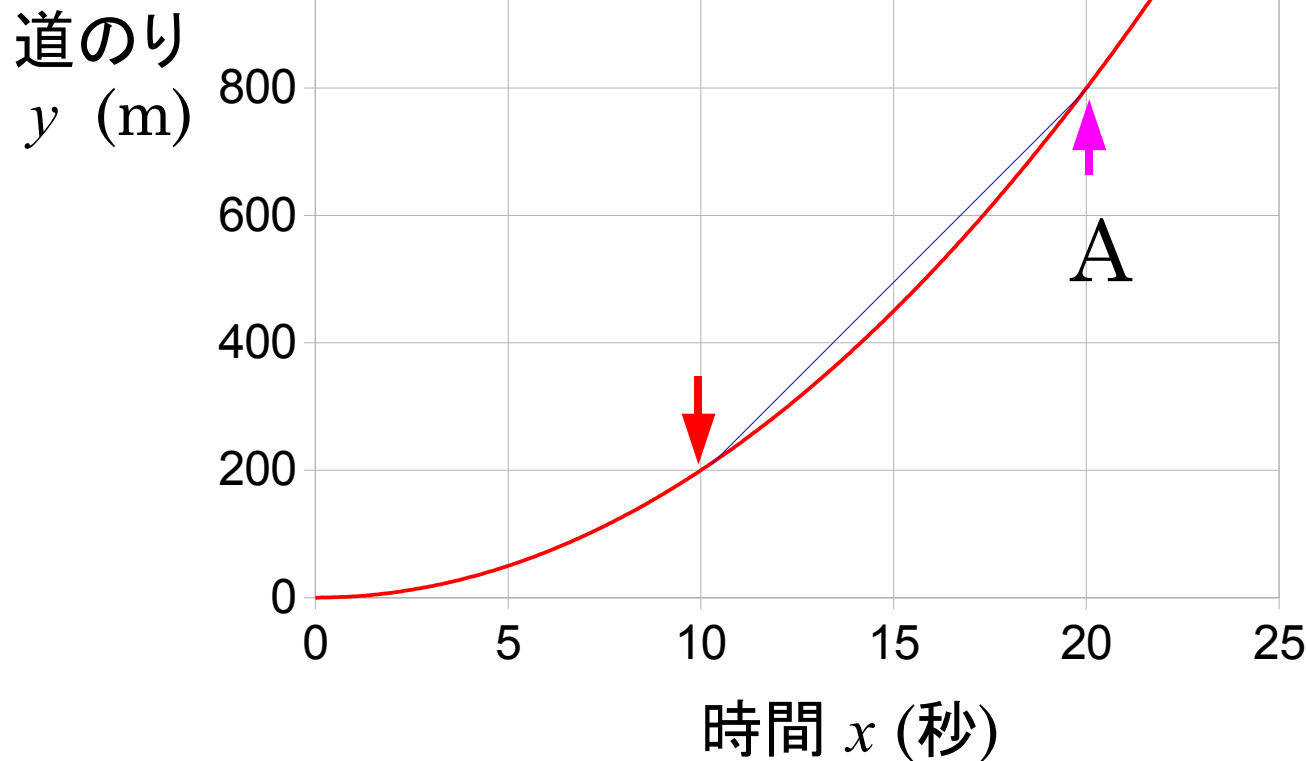
$x=10$ 秒付近の狭い部分を見れば、だいたい直線とみなすことができる

$x=10$ 秒のときの速さは？

2次関数のとき

$$y=2x^2$$

「曲線の傾き」ってどう計算したらいいのかな？



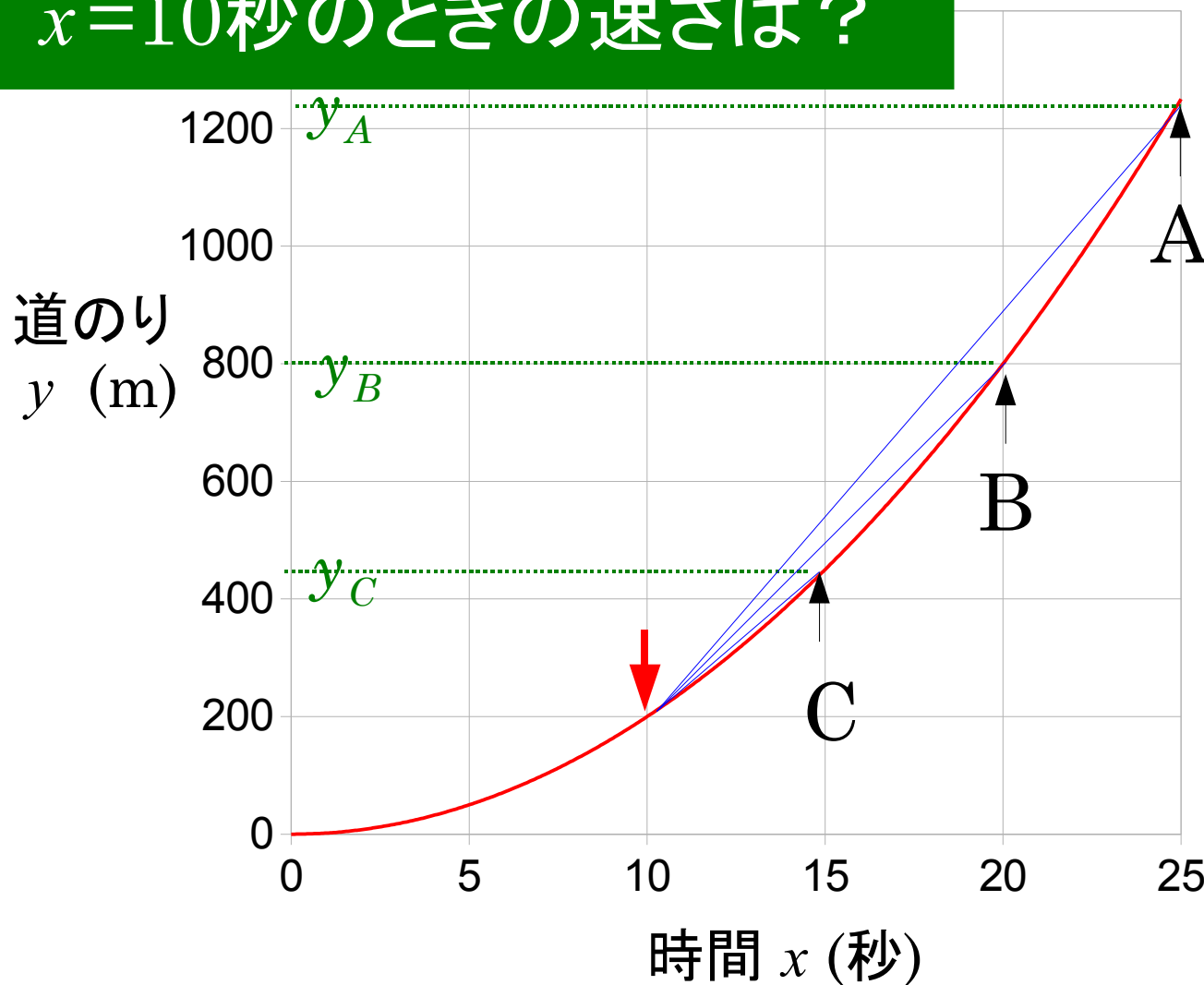
$x=10$ 秒から少し離れた時刻Aまで一定の速さで進行しているみなして、その速さを見積もってみてはどうだろうか。

平均速度

点Aは20秒が適当？ いろいろ試してみよう



$x=10$ 秒のときの速さは？



2次関数のとき

$$y = 2x^2$$

$x=10$ 秒から少し離れた時刻A, B, Cでの道のりを使って速さを見積もってみよう.

$$A: x = 25 \text{ 秒} \quad y_A = 2 \times 25 \times 25 = 1250 \text{ m}$$

$$B: x = 20 \text{ 秒} \quad y_B = 2 \times 20 \times 20 = 800 \text{ m}$$

$$C: x = 15 \text{ 秒} \quad y_C = 2 \times 15 \times 15 = 450 \text{ m}$$

A:  $x = 25$ 秒 のとき

$$v_A = \frac{1250 - 200}{25 - 10} = \frac{1050}{15} = 70 \text{ m/秒}$$

B:  $x = 20$ 秒

$$v_B = \frac{800 - 200}{20 - 10} = \frac{600}{10} = 60 \text{ m/秒}$$

C:  $x = 15$ 秒

$$v_C = \frac{450 - 200}{15 - 10} = \frac{250}{5} = 50 \text{ m/秒}$$

$x = 11$ 秒 のときは  $y = 2 \times 11 \times 11 = 242$  m

$$v = \frac{242 - 200}{11 - 10} = \frac{42}{1} = 42 \text{ m/秒}$$

$x = 10.1$ 秒 のときは  $y = 2 \times 10.1 \times 10.1 = 204.02$  m

$$v = \frac{204.02 - 200}{10.1 - 10} = \frac{4.02}{0.1} = 40.2 \text{ m/秒}$$

$x = 10.01$ 秒 のときは  $y = 2 \times 10.01 \times 10.01 = 200.4002$  m

$$v = \frac{200.4002 - 200}{10.01 - 10} = \frac{0.4002}{0.01} = 40.02 \text{ m/秒}$$

$x = 10$ 秒 のときは  $y = 2 \times 10 \times 10 = 200$  m

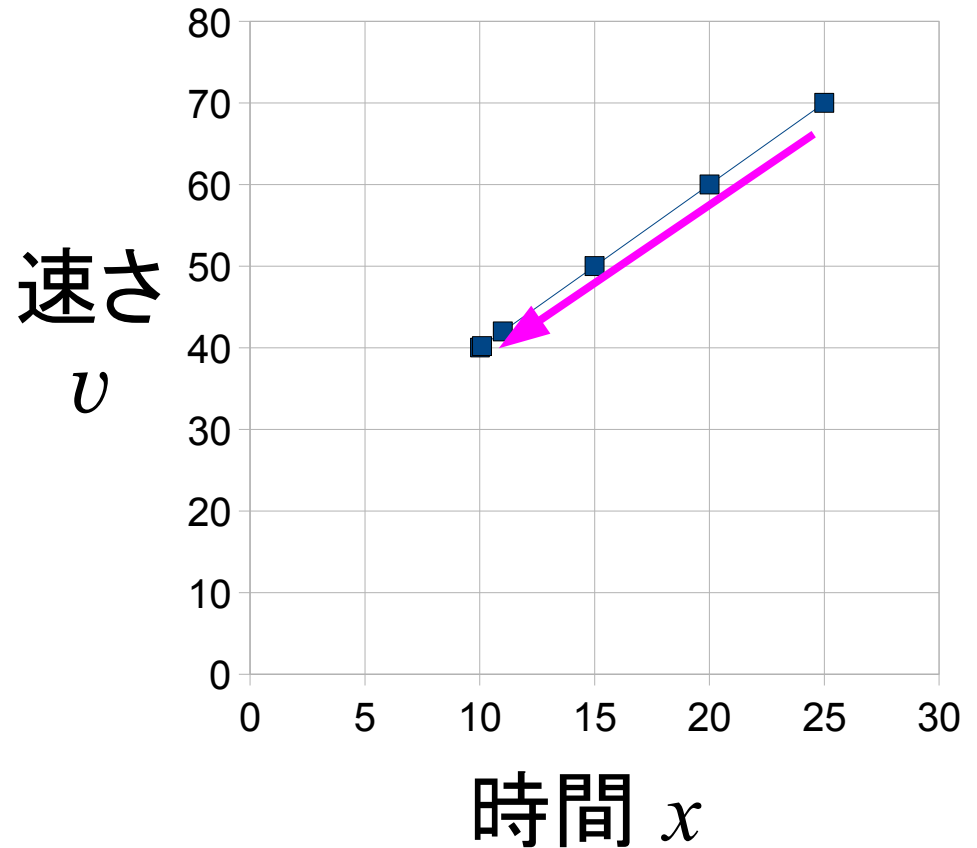
$$v = \frac{200 - 200}{10 - 10} = \frac{0}{0} \quad ???$$



この平均速度の計算式では  
ホントに  $x = 10$ 秒にしてはいけません

# まとめると

時間 $x$	速さ $v$
25	70
20	60
15	50
11	42
10.1	40.2
10.01	40.02



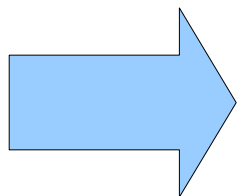
$x$  が 10秒 に近づくと 速さは 40m/秒 に近づく。  
( $x$ をできるだけ10秒に近くするとホントの速さに近づく)

「速さは 40m/秒 に**収束**していく」と言います

(数学用語です)



道のり $y$ が時間 $x$ の関数として分かっているときに、  
例えば  $x=10$ 秒での速さを求める方法



10秒にできるだけ近い時間を考えて、  
10秒からその時間までの平均の速さを  
計算すれば良い

休憩？



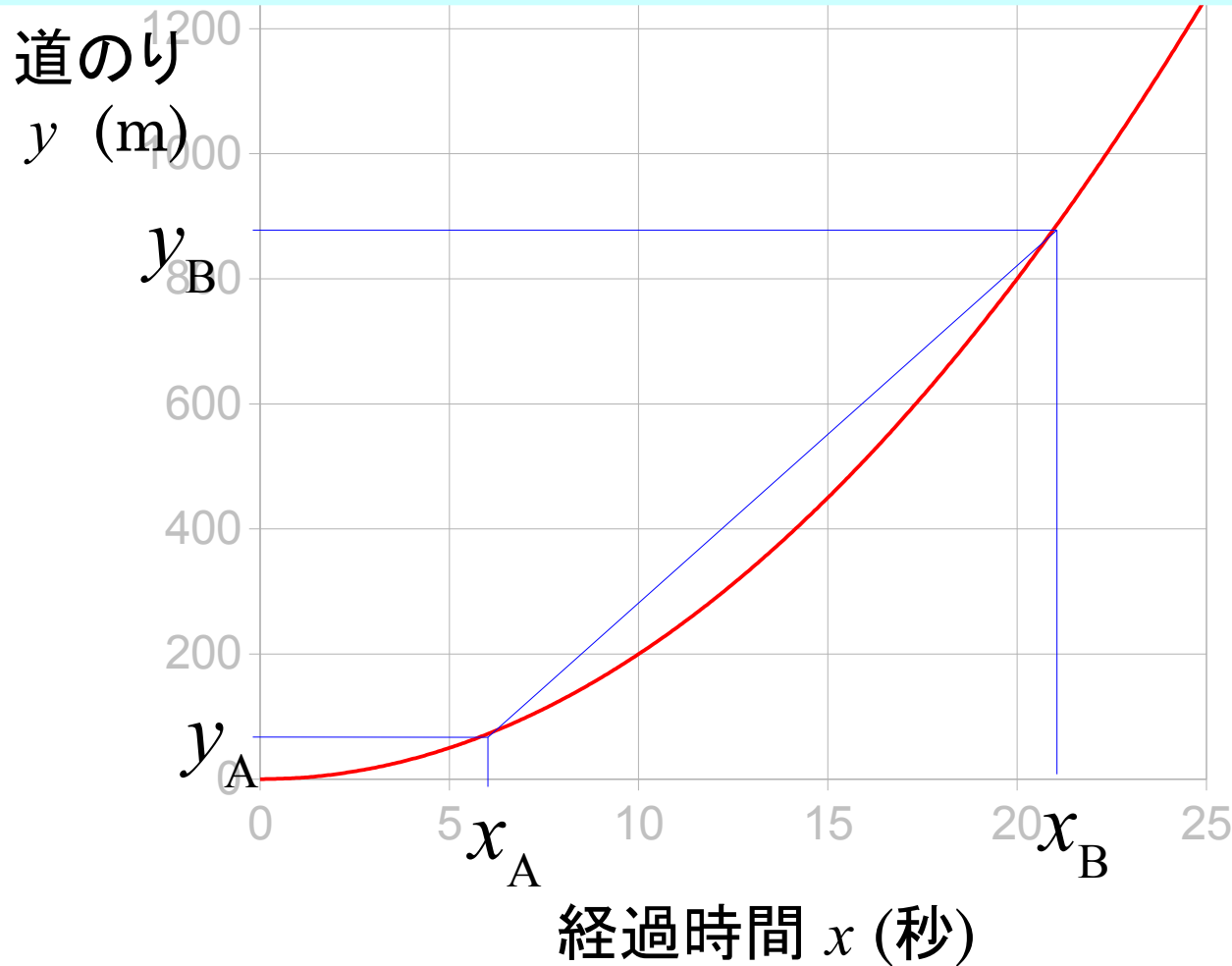
一般に, ある時間 $x_A$ における  
速さを求めてみよう

$x_A=10$ 秒と思えば, これまでの話と同じだよ.



## 例題2

$y=2x^2$  のときに、時間  $x_A$  における速さ



速さ (直線の傾き)  
平均変化率

$$V = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$= \frac{2x_B^2 - 2x_A^2}{x_B - x_A}$$

$x_A$  から少し離れた時間  $x_B$  を考えて、  
その間を平均の速さ  $V$  を求めてみよう

そして  $x_B$  を次第に  $x_A$  に近づけていけば、ホントの速さが分かるはずだ

速さ

$$V = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2x_B^2 - 2x_A^2}{x_B - x_A}$$

$x_B$ をどんどん $x_A$ に近づけていくと速さ $V$ はどうなるかな？

ここで  $x_B = x_A$  を代入すると...

$$V = \frac{0}{0}$$

意味不明！  
これはマズイ！



もう少し $V$ の式を性質を調べて見ましょう.

公式

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{2x_B^2 - 2x_A^2}{x_B - x_A} \\ &= \frac{2(x_B - x_A)(x_B + x_A)}{x_B - x_A} \\ &= 2(x_B + x_A) \end{aligned}$$

分子を因数分解すると

■ 成功の秘訣！ ■

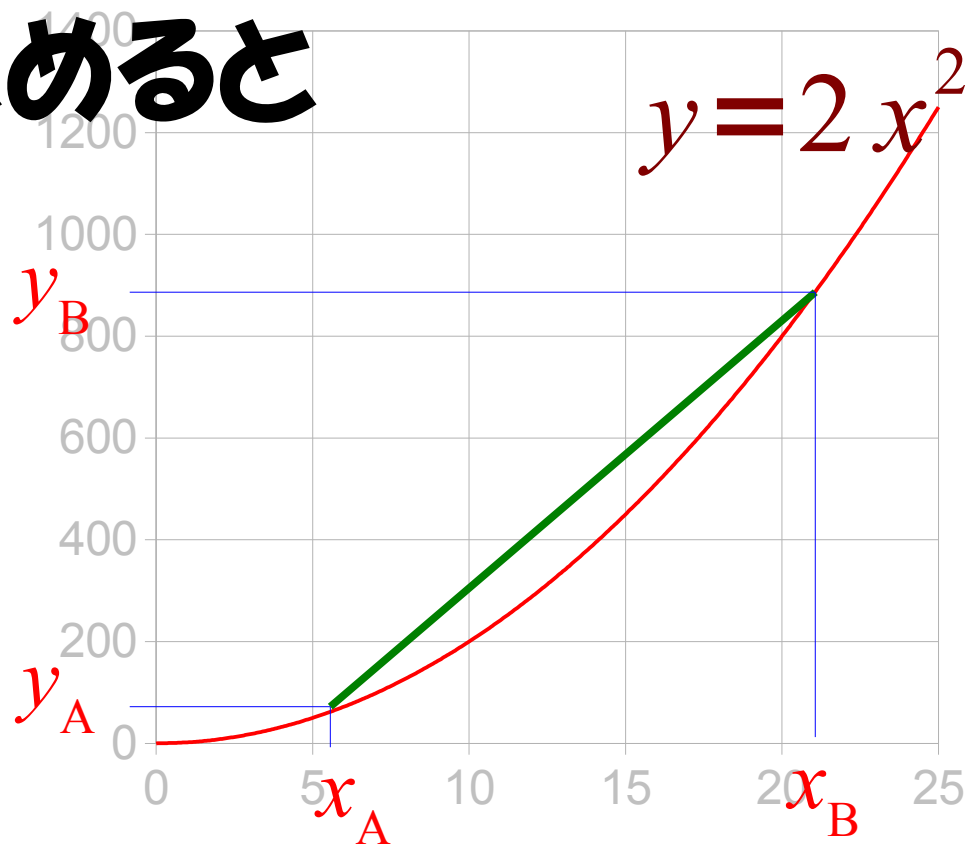
$x_B = x_A$  としたときにゼロになってしまう部分をうまく約分できた

ここで  $x_B$  が  $x_A$  に近づくと...

$$V = 2(x_A + x_A) \quad \longrightarrow \quad V = 4x_A$$

(ここでは  $x_B = x_A$  を代入しちゃったけど、おかしいことにならない)

# まとめると



速さ (平均変化率)

$$V = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$= \frac{2x_B^2 - 2x_A^2}{x_B - x_A}$$



$x_B$  が  $x_A$  に近づけば,  
速さ  $V$  (平均変化率) はどんどん  $4x_A$  に  
近づいていく

$$\lim_{x_B \rightarrow x_A} V = 4x_A$$

と書く

(注)  $\lim$  は limit (極限) という意味



結局、

$$\lim_{x_B \rightarrow x_A} V = 4 x_A$$

道のり  $y$  が時間  $x_A$  の関数として分かっているのであれば、時間  $x_A$  における速度  $V$  は  $x_A$  だけで決まる。

$x_B$  の取り方にはよらない。つまり、時間  $x_A$  における速度  $V$  は

$$V = 4 x_A$$

と書けます。

このように時間  $x_A$  によって速度  $V$  の値が変化することがわかる

**質問:**  $x_A = 10$  [秒]での速度はどれだけの速度ですか？

## 前ページの問

質問:  $x_A=10$  [秒]での速さはどれだけですか？

(答)  $V=4x_A$  ですから

$$4 \times 10 = 40 \text{ [m/秒]}$$

問3: 道のり $y$  [km]と時間 $x$  [秒]の関係が

$$y = 7x^2$$

で与えられているとき, 時間 $x_A$ における速さ $V$ を求めてください.

問4: 道のり $y$ と時間 $x$ の関係が前問のように与えられているとき,  $x_A = 5$ 秒における速さ $V$ を求めてください.



$$V = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{として} \quad \lim_{x_B \rightarrow x_A} V = 4x_A$$

を導いたのですが, この  $\lim_{x_B \rightarrow x_A} \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$  のことを

$x_A$  における  $y$  の **微分係数** と言います.



**道のりの微分係数が速さ** に等しいことになります.

(注) 微分係数という言葉は数学用語です.  
 $y, x$  が道のりと経過時間ではないような場合にも  
使うことができる言葉です.



## (補足)

次のページでは「 $\Delta x$ 」,「 $\Delta y$ 」という表記があります.  
この「 $\Delta x$ 」は $\Delta \times x$ という意味ではありません.  
「 $\Delta x$ 」で一つの記号です.「 $\Delta y$ 」も同様.

「 $\Delta x$ 」なんて書かずに,例えば  $h$  というような1文字の記号  
で書いても構わないのです.

ですが,  $x$ に関する微小量というのを表現するのにしばしば  
「 $\Delta x$ 」と記号を使います.

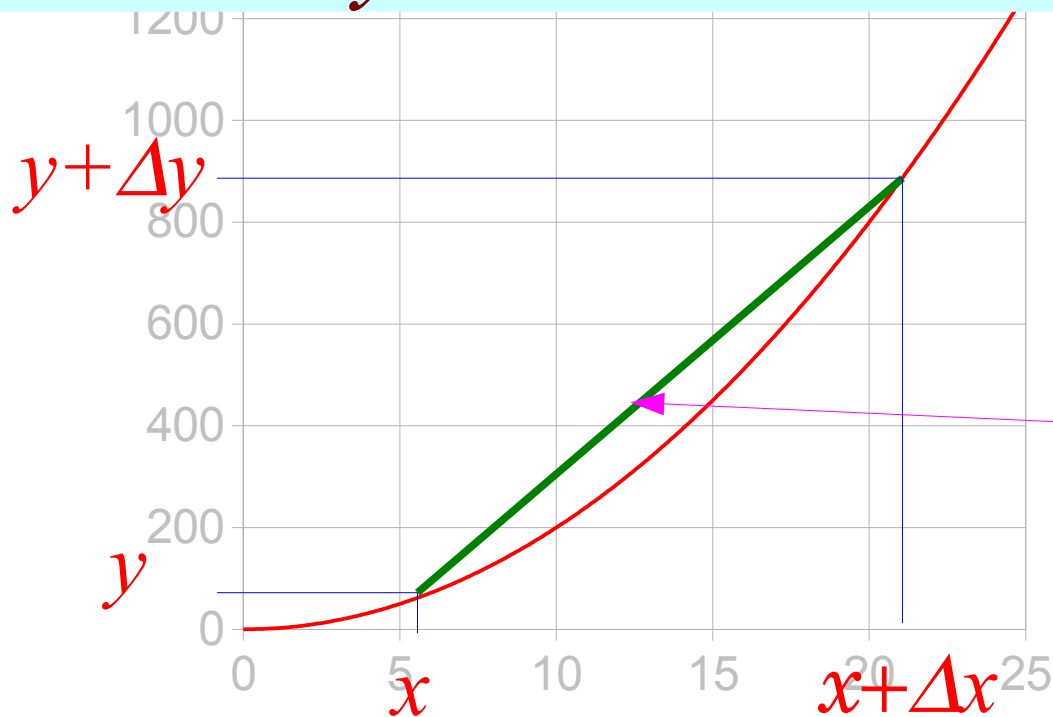
ちなみに, この  $\Delta$  は,ギリシャ文字です.  
「デルタ」と読みます.  
アルファベットのDに対応します.

次のページに書かれていることは,これまでのページに  
書かれていた内容とまったく同じです. 少し, 記号などを  
書き換えているだけです. そう思って見比べてください.

### 例題3

$y = 2x^2$  の場合.

少し表現を変えると...



(注) 「 $\Delta x$ 」は $\Delta \times x$ という意味ではない. 「 $\Delta x$ 」で一つの記号とみなす. 「 $\Delta y$ 」も同様.

速さ (直線の傾き)

$$V = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



時間 $x$ における  
速さ

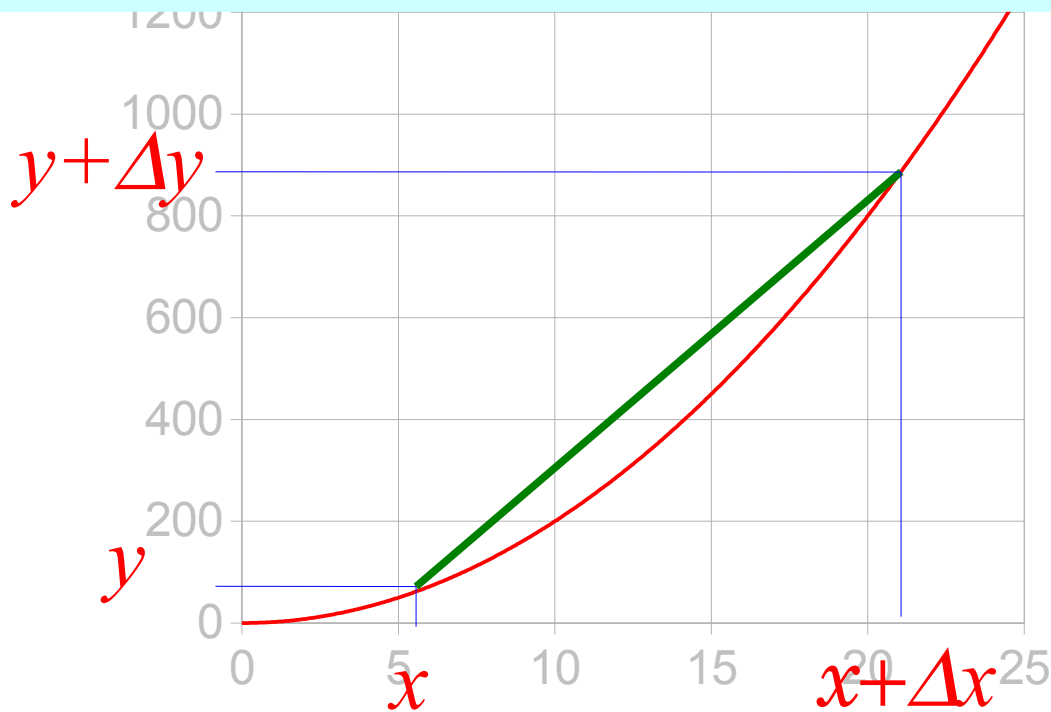
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  を  $\frac{dy}{dx}$  と書くなら

$$\frac{dy}{dx} = 4x \quad \text{とも書ける}$$

### 例題4

$y=2x^2$  の場合. 少し表現を変えると...



$$y = 2x^2$$

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2$$

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 2x^2$$

$$= 2[x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2] - 2x^2$$

$$= 4x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2(\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2(\Delta x) \quad \text{なのだから}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [4x + 2(\Delta x)] = 4x$$

つまり

$$\frac{dy}{dx} = 4x$$

となる



$y$ の微分係数が $x$ の関数として与えられているとき、これを $y$ の**導関数**と言います。

$$\frac{dy}{dx}$$

と書きます。

$y$ の導関数を求めることを「 $y$ を**微分する**」と言います。

例えば

$$y = 2x^2 \text{ を微分すると } \frac{dy}{dx} = 4x$$

問5 次の関数を微分しなさい

(1)  $y = x^2 + 2x + 1$

(2)  $y = 2x^3$

(3)  $y = \frac{1}{x+1}$

# 今日はここまで

