数学と理科の接点

「中学生にわかる微積分学」

その２

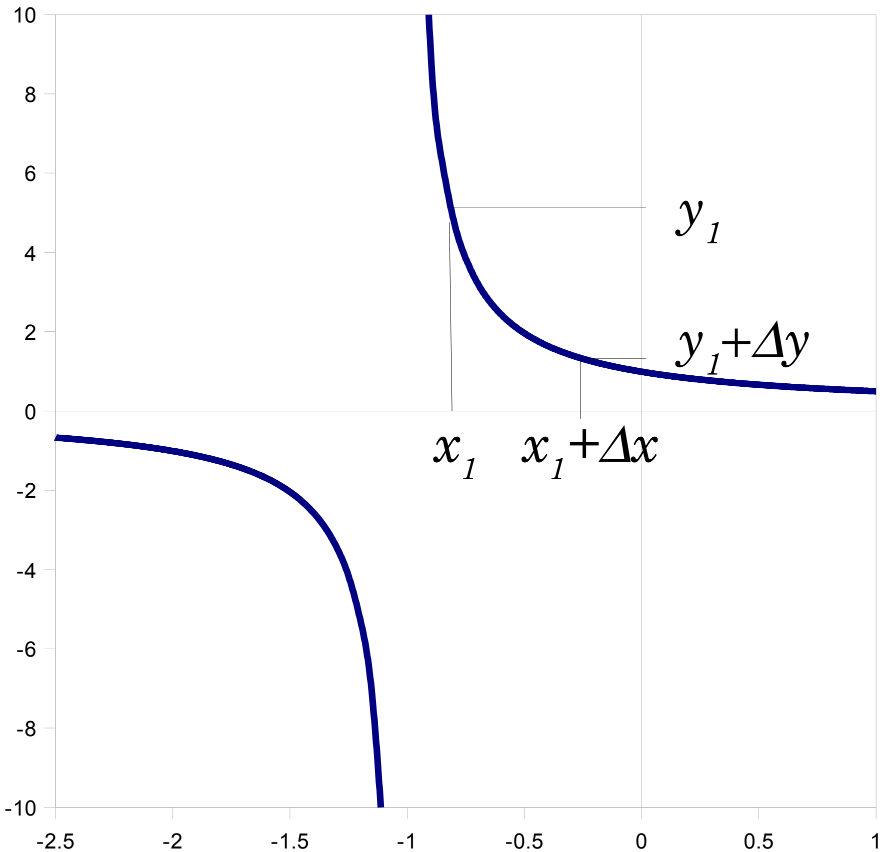
微分学入門(第2回目)

文字化け修正版

岡田耕三
（岡山大学大学院自然科学研究科）

第１回の問5(3)の解答例

(3) $$y=\frac{1}{x+1}$$



x_1における微分係数を求めてみる

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{x_1+1} & \cdots① \\ y_1+\Delta y=\dfrac{1}{(x_1+\Delta x)+1} & \cdots② \end{cases}$$

①, ②から

$$\Delta y=\frac{1}{(x_1+\Delta x)+1}-\frac{1}{x_1+1}$$

$$=\frac{-\Delta x}{(x_1+\Delta x+1)(x_1+1)}$$

Δxで割り算すると

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{(x_1+\Delta x+1)(x_1+1)}$$

従って $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{(x_1+1)^2}$$

x_1をxに置き換えて $$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

（計算に慣れてきたらx_1を始めからxとおいて計算しても良い）

今回の内容

「速さ」についての復習

微分学入門（第１回の復習）

微分学入門（第2回）
ニュートン物理学入門

前半の復習の部分では，第1回の資料を要約する一方で,加筆もしました．第1回の内容が良く分からなかった人は，第1回の資料とも見比べながら勉強してみてください．

「xxページ目あたりが難しい」とか，気楽に内容に関する質問をメールしてください．
期限前でも構いません．
追加資料作成します．

このテキストを読んで問1-4に答えて下さい．
期日は12/12(金)とします．

（出典：Wikipedia）

岡山-新大阪
180km (新幹線)
所要時間 44分

第1経路

所要時間	44分
乗車キロ	180.3 km
合計	6060円
定期	一ヶ月 130140円

乗換	着発	所要	駅名／路線・列車名	運賃
	15:14		岡山	
	◎	44分	新幹線のぞみ32号	2940円
	15:58		新大阪	

http://www.hyperdia.com/

$$\text{分速} = \frac{180\text{km}}{44\text{分}} = 4.1\ \text{km/分}$$

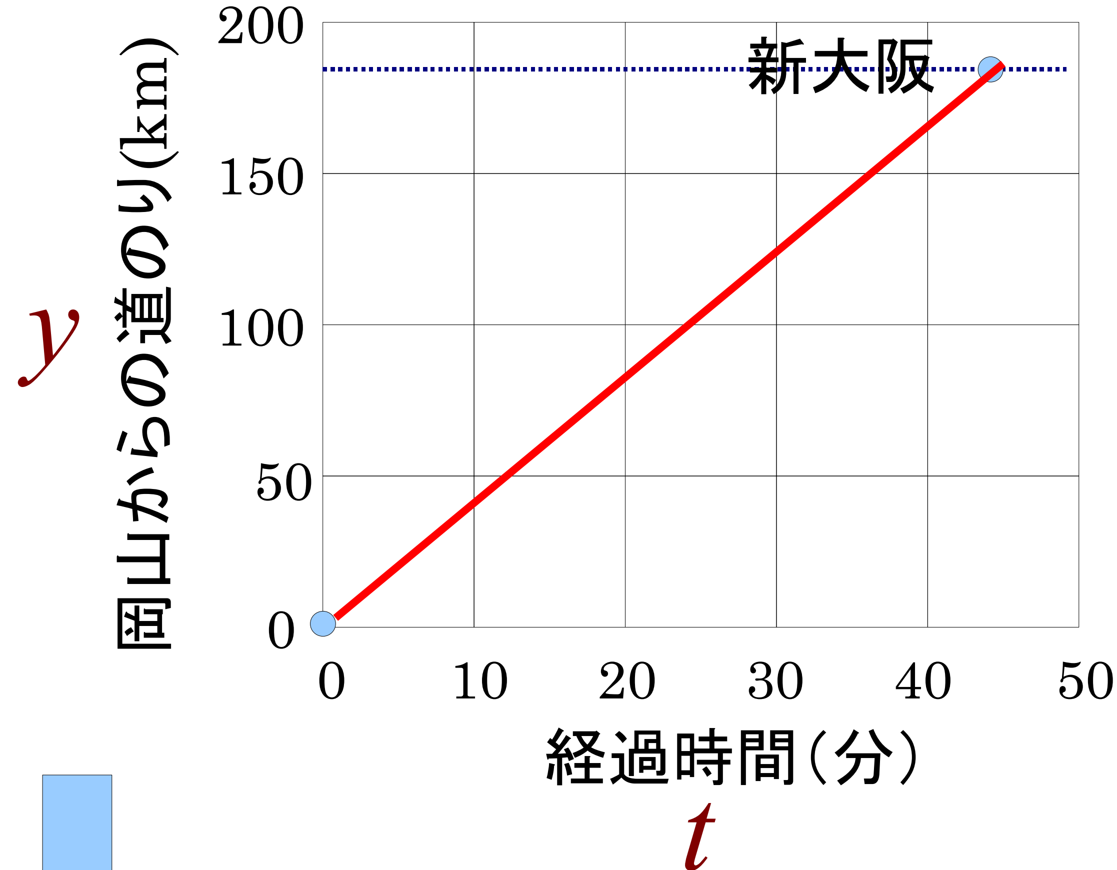
同じ速さ

$$\text{時速} = \boxed{4.1 \times 60 = 246\ \text{km/時}}$$

新幹線の時速を求めるために,ホントに新幹線を1時間走らせる必要はない.
ほんの短時間で走った距離が分かれば新幹線の速さは分かる.
その「短時間」をどんどん短くしていったら・・・・というのが微分の話に繋がります.

経過時間と道のりの関係（速さが4.1[km/分]の場合）

経過時間 t [分]	走った道のり y [m]
10	41
20	82
30	123
40	164



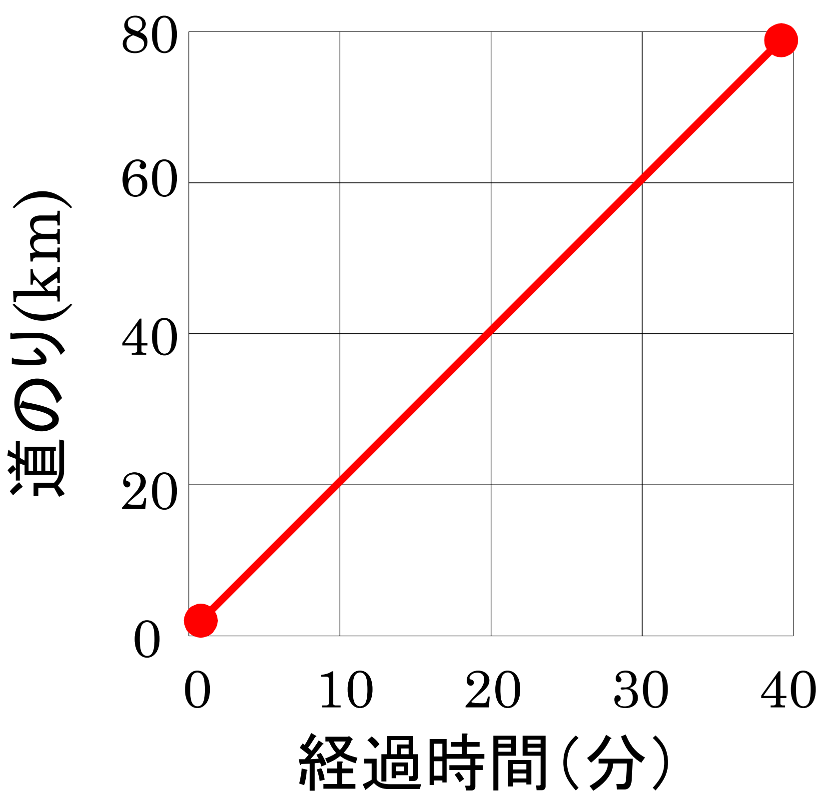
$$y = 4.1t$$

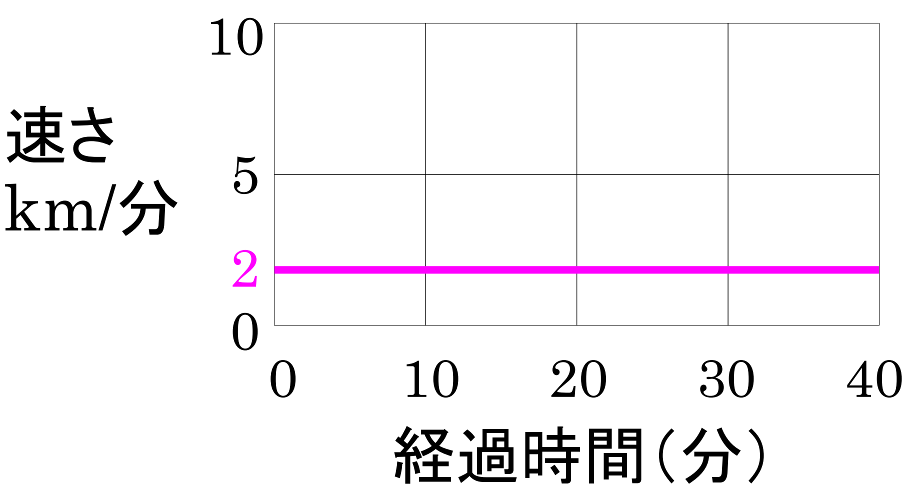
（ t に関する1次関数）

直線の傾き＝速さ

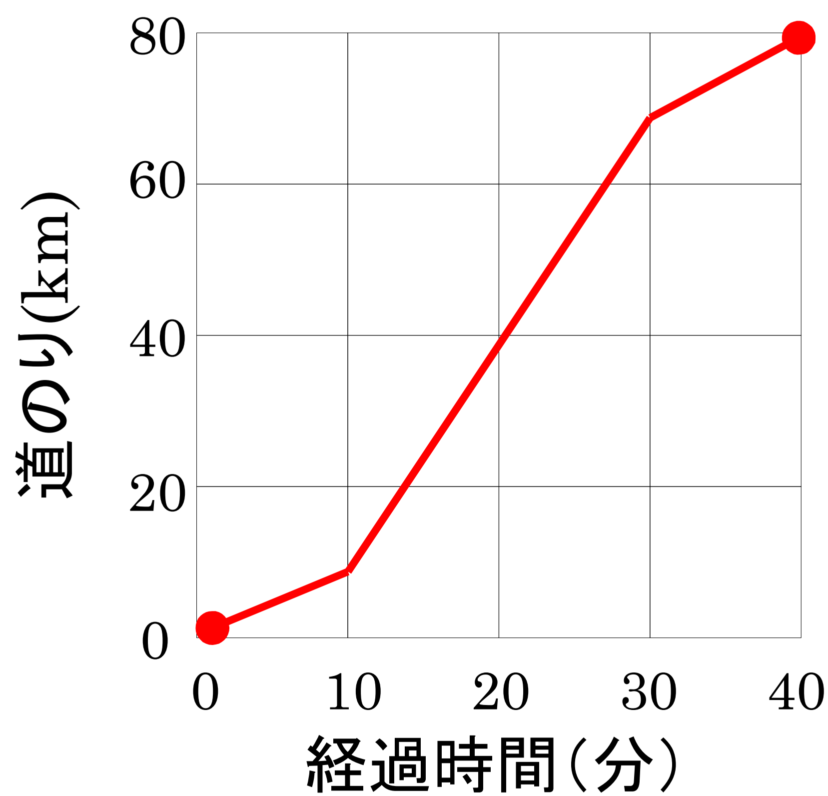
速さを知りたければ傾きを調べれば良い

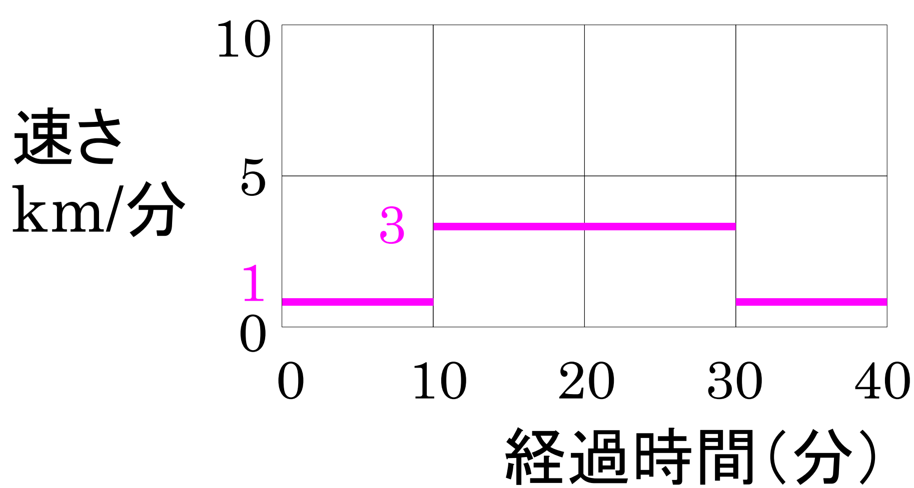
速さが2[km/分]の場合

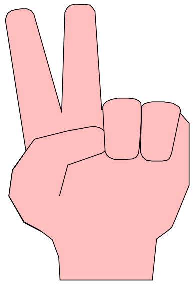




途中で速さが変わる場合







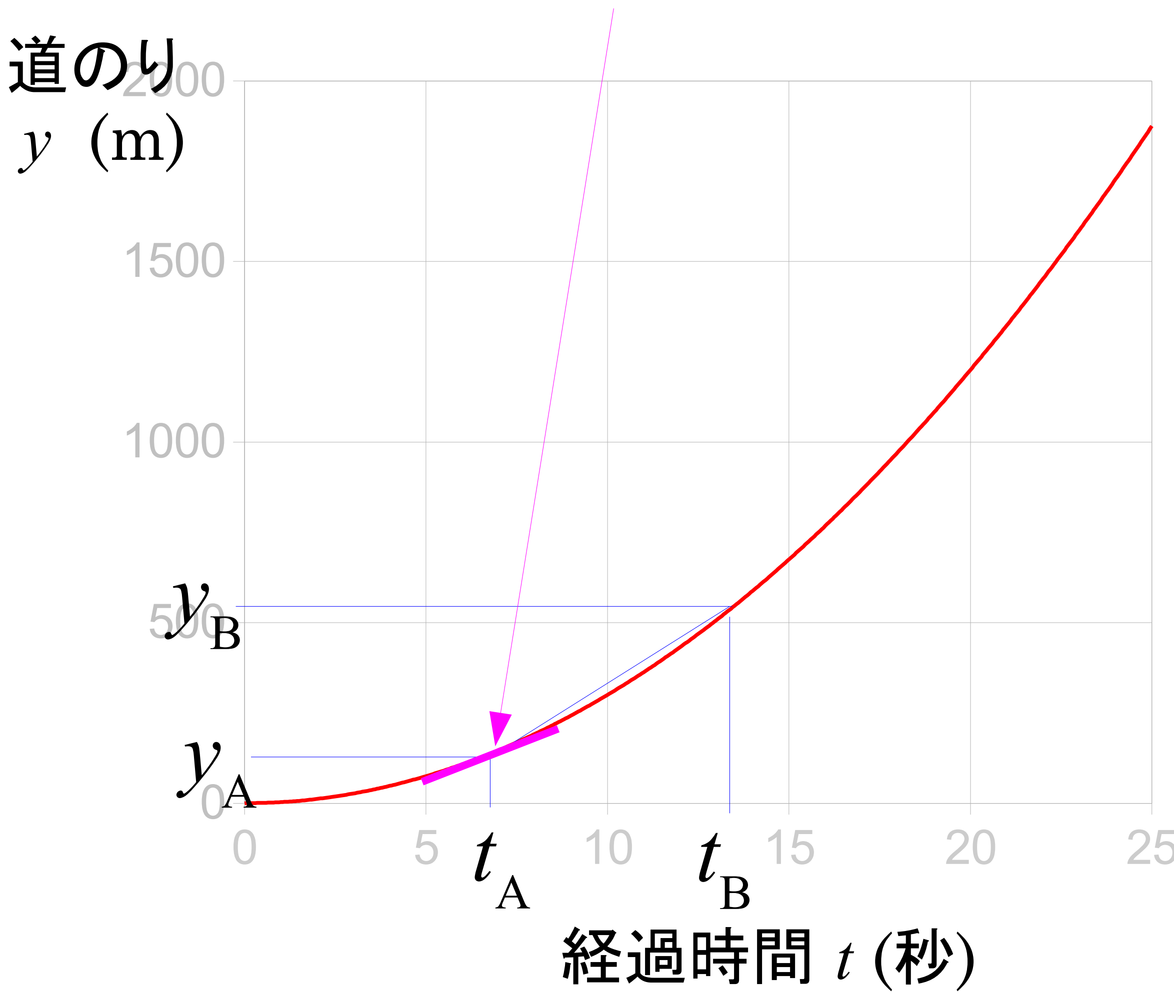
速さは
「時間-道のり」グラフの傾き

「時間-道のり」が折れ線や曲線になると，**速さも時間変化する**

「道のり-時間」が１次関数では表せないような場合について,考えてみよう.
　その例として，２次関数の場合を取り上げ，ある時間t_Aにおける速さを求めてみよう

例題1　$y=3t^2$　のときに，時間t_Aにおける速さ

t_Aの極近くだけを見ると1次関数のように見えるので，その1次関数の傾きを調べてやれば，t_Aにおける速さは分かるだろう，というのが基本的な考え方だ．

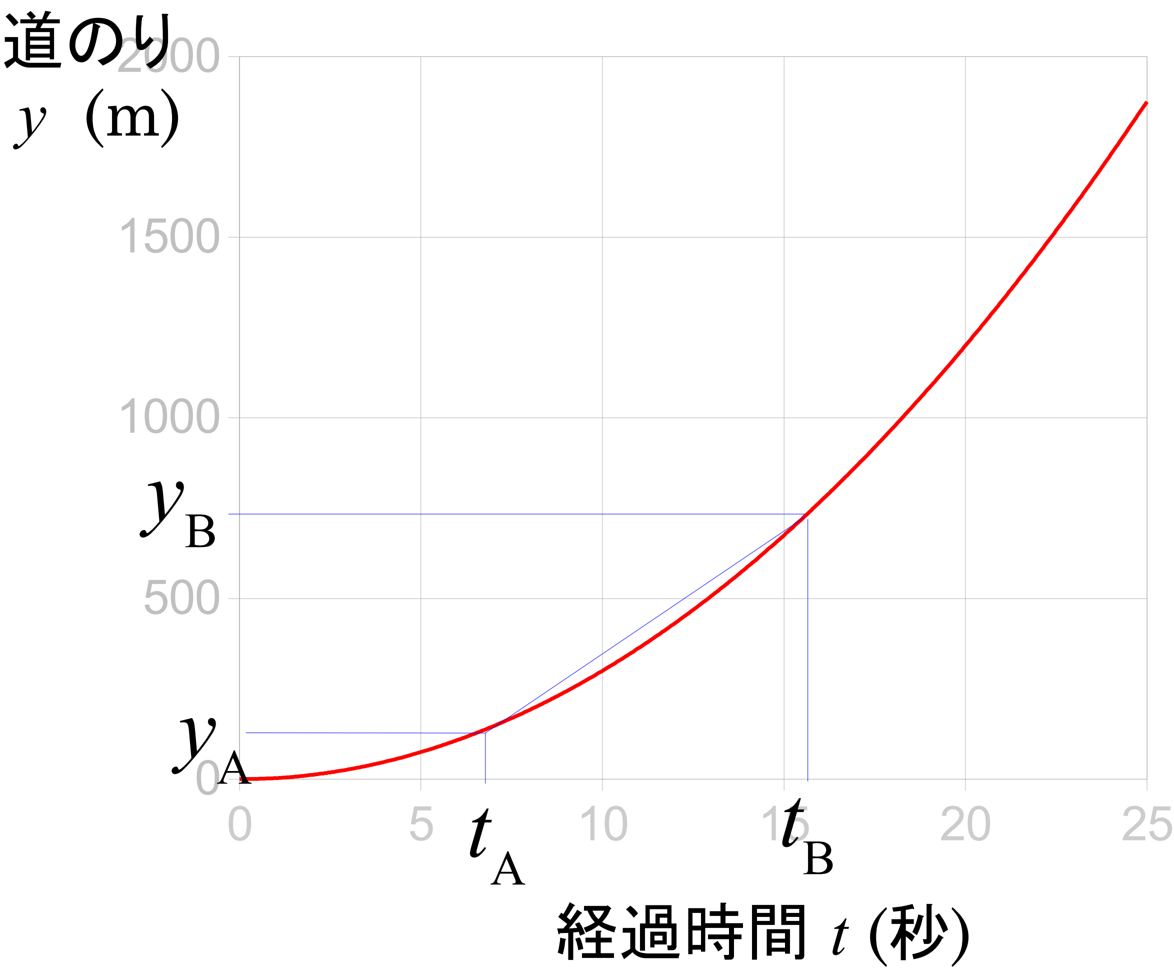


具体的にどうやってその1次関数を作るのか？

ここでは，t_Aから少し離れた時間t_Bを考えて，２点(t_A, y_A)，(t_B, y_B)を結ぶ直線(1次関数)を考えてその傾きを調べてみよう．

t_Bはできるだけt_Aに近くした方がより正確な速さが求まりそうだ．

例題1　$y = 3t^2$ のときに，時間x_Aにおける速さ



速さ　（直線の傾き）

平均変化率

$$V = \frac{y_B - y_A}{t_B - t_A}$$

$$= \frac{3t_B^2 - 3t_A^2}{t_B - t_A}$$

t_Aから少し離れた時間t_Bを考えて，
その間を平均の速さVを求めてみよう

そして t_Bを次第にt_Aに近づけていけば，ホントの速さが分かるはずだ

速さ $V=\dfrac{y_B-y_A}{t_B-t_A}=\dfrac{3t_B^{\,2}-3t_A^{\,2}}{t_B-t_A}$

t_Bをどんどんt_Aに近づけていくと速さVはどうなるかな？

ここで $t_B=t_A$を代入すると･･･

$$V=\frac{0}{0}$$

意味不明！
これはマズイ！

もう少しVの式を性質を調べて見ましょう.

公式

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$$

$$V=\frac{3t_B{}^2-3t_A{}^2}{t_B-t_A}$$

分子を因数分解すると

$$=\frac{3(t_B-t_A)(t_B+t_A)}{t_B-t_A}$$

$$=3(t_B+t_A)$$

■成功の秘訣！■

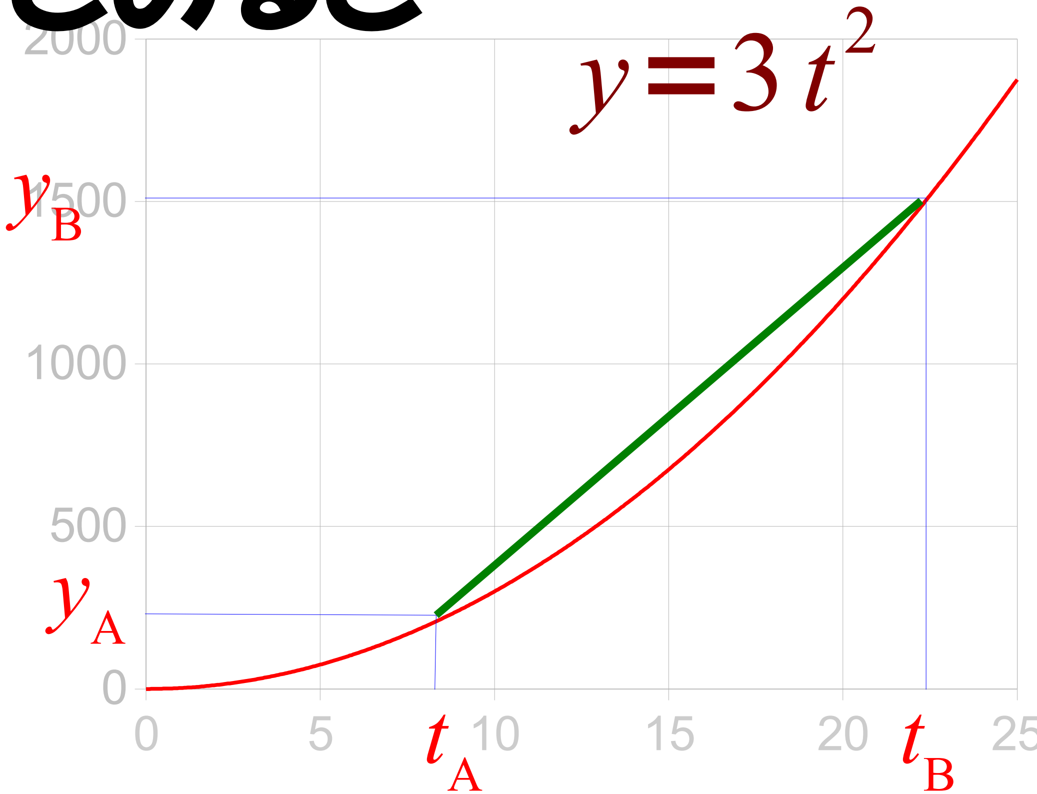
$t_B=t_A$ としたときにゼロになってしまう部分をうまく約分できた

ここで t_B が　t_A に近づくと・・・

$$V=3(t_A+t_A) \Rightarrow V=6t_A$$

（ここでは $t_B=t_A$ を代入しちゃったけど，おかしなことにならない）

まとめると



速さ（平均変化率）

$$V=\frac{y_B-y_A}{t_B-t_A}$$

$$=\frac{3t_B^{\ 2}-3t_A^{\ 2}}{t_B-t_A}$$

☑ t_B が t_A に近づけば,
速さ V (平均変化率)はどんどん $6t_A$ に
近づいていく

$$\lim_{x_B\to x_A} V=6t_A$$

と書く

（注）lim はlimit (極限)という意味

結局、 $$\lim_{x_B \to x_A} V = 6t_A$$

時間 t_A における速さ v は t_A だけで決まる.
t_B の取り方にはよらない.

つまり, 時間 t_A における速さ v は

$$v = \lim_{x_B \to t_A} V = 6t_A$$

新幹線の時速を求めるために,ホントに新幹線を1時間走らせる必要はない.
ほんの短時間で走った距離が分かれば新幹線の速さは分かる.
その「短時間」をどんどん短くしていったら・・・・というのが微分の話に繋がります.

結局,限りなく短時間にしてしまいました.

☑ $V=\dfrac{y_B-y_A}{t_B-t_A}$ として $\lim\limits_{t_B\to t_A} V=6t_A$

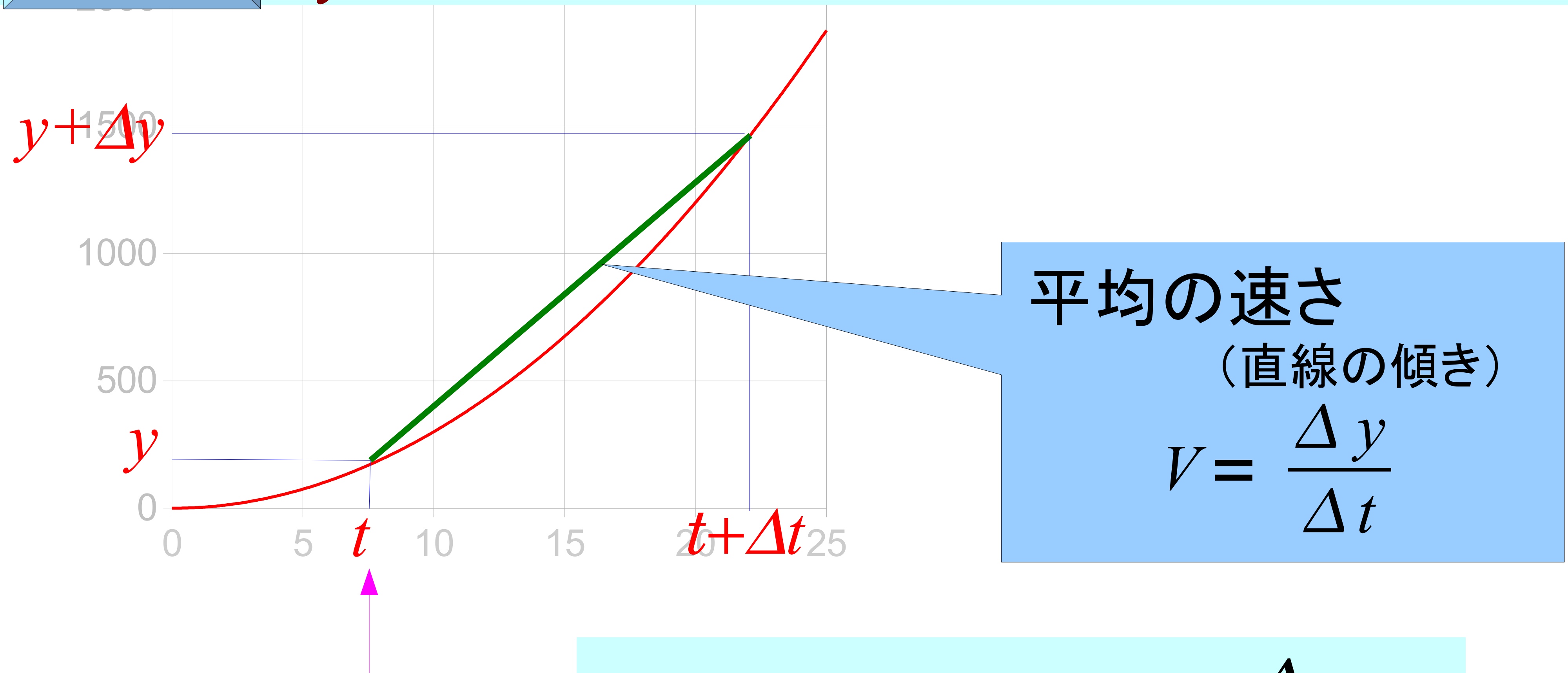
を導いたのですが，この $\lim\limits_{t_B\to t_A}\dfrac{y_B-y_A}{t_B-t_A}$ のことを

t_Aにおけるyの微分係数と言います.

☑ 道のりの微分係数が速さに等しいことになります.

（注） 微分係数という言葉は数学用語です.
y, t が道のりと経過時間ではないような場合にも
使うことができる言葉です.

例題2　$y=3t^2$ の場合．　少し表現を変えると･･･



☑ 時間tにおける速さv

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$ を $\dfrac{dy}{dt}$ と書く．したがって $\boxed{v=\dfrac{dy}{dt}}$

$y=3t^2$ の場合. 具体的に計算してみると・・・・・

$$y=3t^2$$

$$y+\Delta y=3(t+\Delta t)^2$$

$$\Delta y=3(t+\Delta t)^2-3t^2$$
$$=3\left[t^2+2t(\Delta t)+(\Delta t)^2\right]-3t^2$$
$$=6t(\Delta t)+3(\Delta t)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t}= \quad 6t+3(\Delta t)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 6t + 3(\Delta t)$$ において$\Delta t \to 0$にすると

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} [6t + 3(\Delta t)] = 6t$$

つまり

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 6t}$$

☑ yの微分係数 がtの関数として与えられているとき，
これを yの**導関数** と言い，

$$\frac{dy}{dt}$$

と書きます．

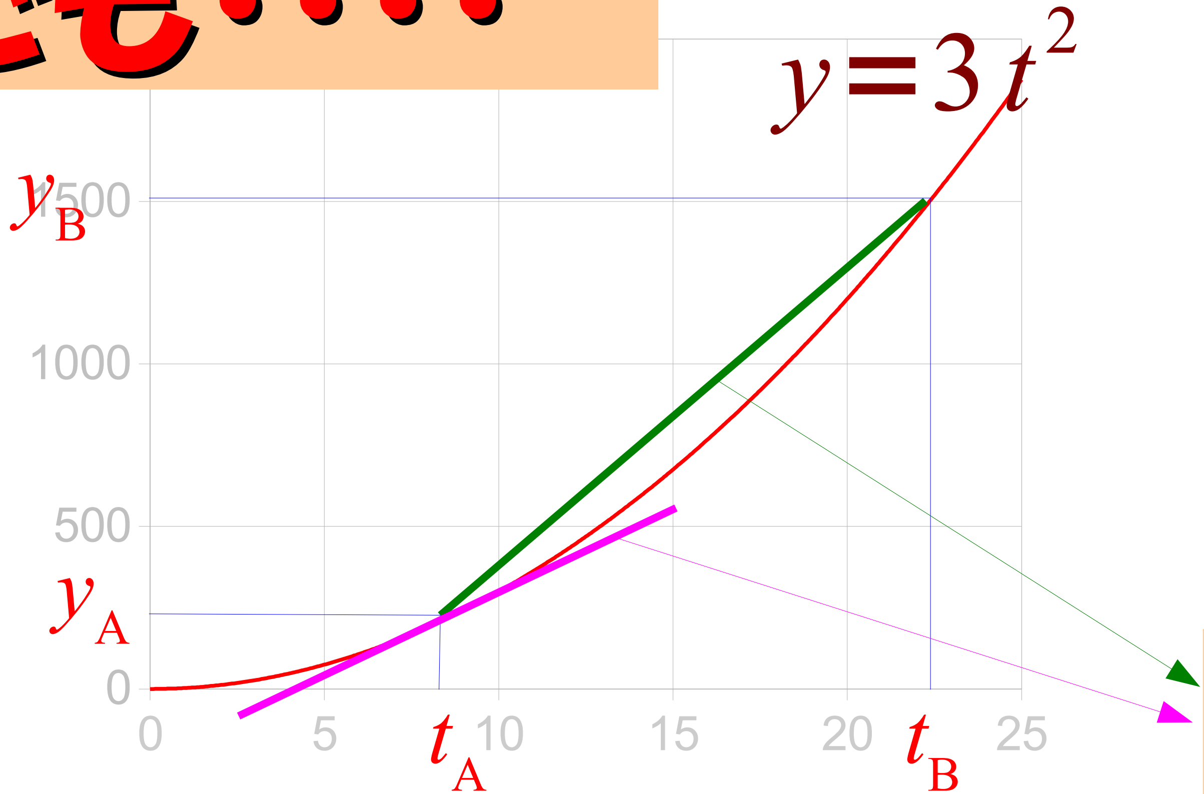
yの導関数を求めることを「yを**微分する**」と言います．

[例]　$y=3t^2$ を微分すると $\dfrac{dy}{dt}=6t$

また，$t=3$でのyの微分係数は $6\times 3=18$

$\dfrac{dy}{dt}(3)=18$ あるいは $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=3}=18$ と書いても良い

でも・・・・



素直な疑問

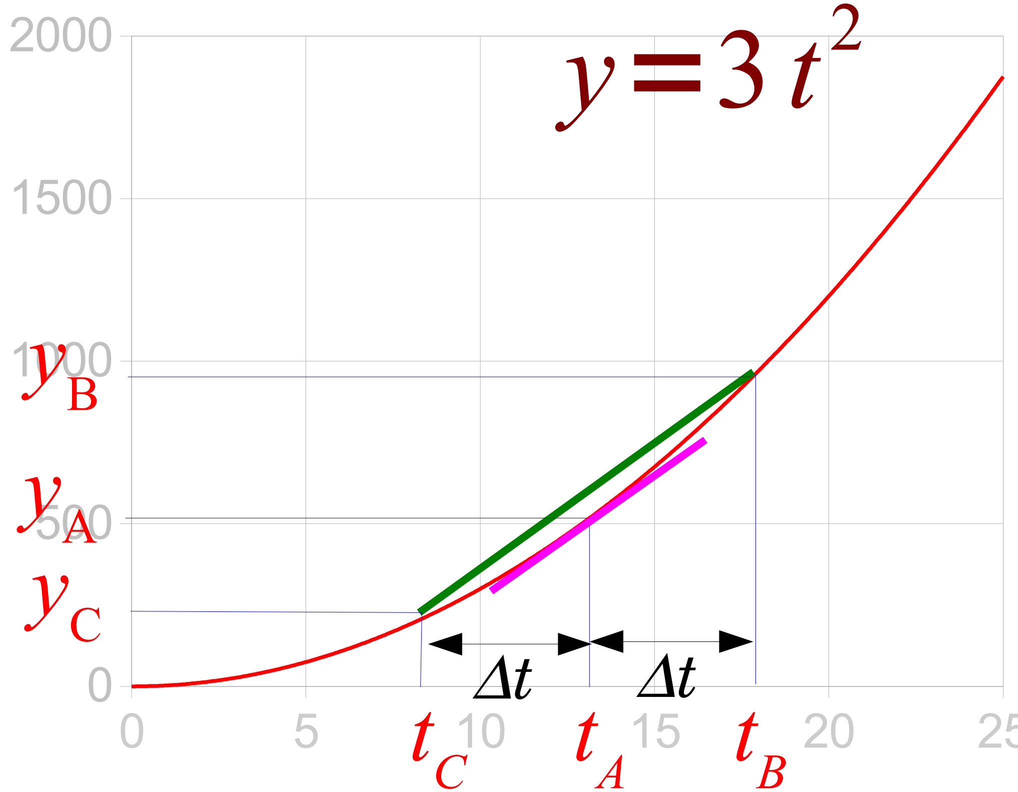
見るからに，傾きが違ってる・・・．

t_Bをt_Aに近づけたらホントに緑はピンクに重なるのかなあ？？

t_B が t_A に近づけば，
速さ V (平均変化率)はどんどん $6t_A$ に近づいていく

これ，ホントかなあ・・・・？

では，少し平均変化率の計算の仕方を変えてみましょう



t_Aから常にΔtだけ離れた時間t_B,t_Cを考えて，その時間の間での平均変化率を考えて見ましょう.

前ページの場合とは違って，見るからにピンクと緑の傾きは近く見える. Δtがさらに小さくなればもっとピンクと緑は良く一致するように見えそうだ.

$t_B=t_A+\Delta t$ のとき $y_B=3t_B^2=3(t_A+\Delta t)^2=3(t_A^2+2t_A\Delta t+(\Delta t)^2)$

$t_C=t_A-\Delta t$ のとき $y_C=3t_C^2=3(t_A-\Delta t)^2=3(t_A^2-2t_A\Delta t+(\Delta t)^2)$

$\Rightarrow y_B-y_C=12t_A\Delta t$

平均変化率Vは $V=\dfrac{y_B-y_C}{t_B-t_C}=\dfrac{12t_A\cancel{\Delta t}}{2\cancel{\Delta t}}=6t_A$

おっ～と，Δtをまだ小さくしていないのに$V=6t_A$になっちゃった！

今の場合,Δtをまだ小さくしていないのに$V=6t_A$になっちゃったけど,

$$\lim_{\Delta t \to 0} V = 6t_A$$

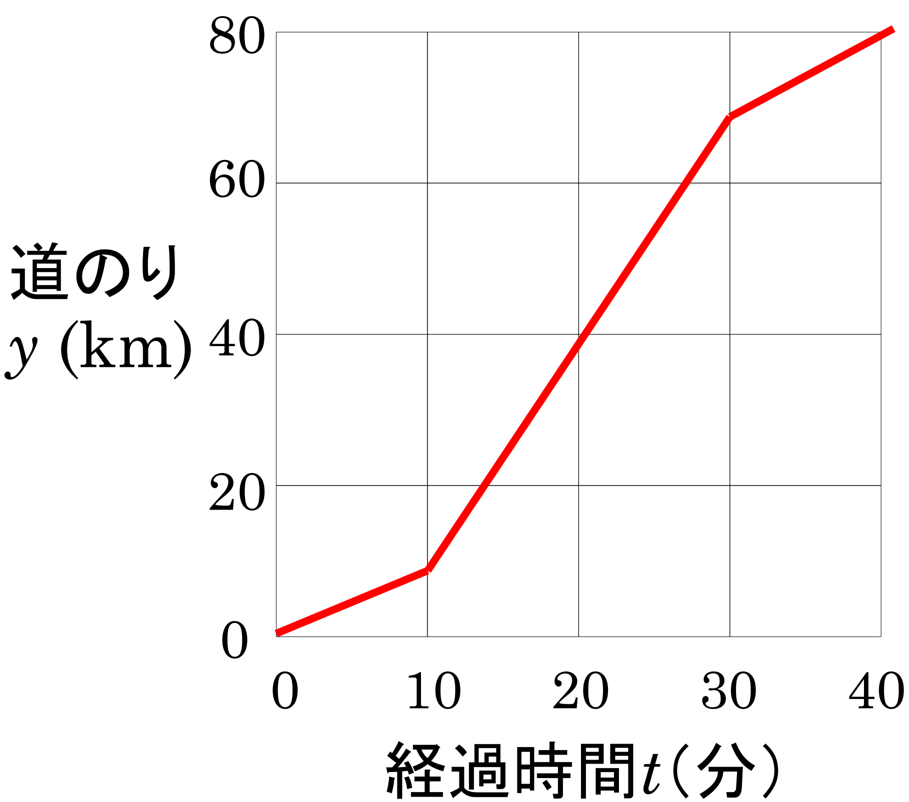
であることには変わりはない.

つまり,平均変化率の定義の仕方を変えても,$\Delta t \to 0$でのVの値には影響がないことが分かった.

$y=3t^2$はt_Aにおいて**微分可能**という.

平均変化率の定義の仕方次第で(極限操作の仕方次第で)
$\Delta t \to 0$でのVの値が変わってしまう場合は,**微分不可能**という.

[例1]途中で速さが突然変わる場合 （折れ線グラフ）



左のような場合，t=10分, 30分の２点で速さ(グラフの傾き)が急変している．例えば，t=10分を境にして速さが1[km/分]から3[km/分]に突然変化している．ということは「t=10分での速さがどれだけか」と問われたとき，t=10分より前の部分からは1[km/分]，後の部分からは3[km/分]と答えることになり，t=10分での速さが一つの値に定まらないことになる．よって，t=10分では微分不可能である．同様に，t=30分でも微分不可能である．

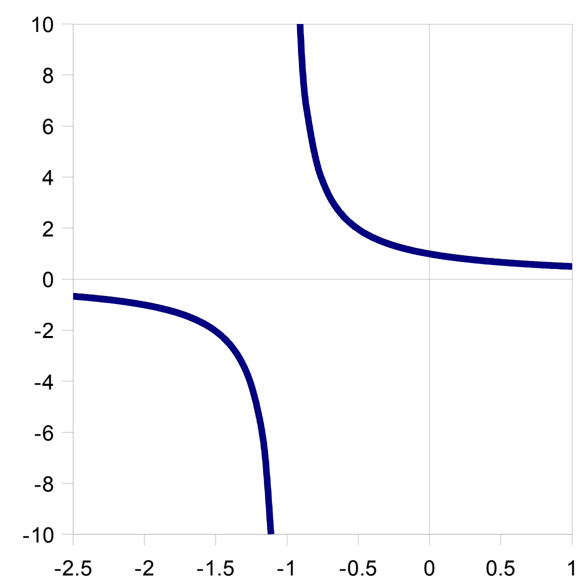
この２点を除けば微分可能

[例2]

$$y=\frac{1}{x+1}$$

x=–1以外では微分可能.

そもそもx=–1ではyの値が無限大になってしまうのでマズイ. 一見してx=–1の両側で関数の傾きも異なっている.



[問1]

$y = 8x^2$ について，x=5における微分係数を求めよ.

また，平均変化率の取り方を変えても微分係数の値が変わらないことを確かめよ.

ヒント
$x_A=5$, $x_B=5+\Delta x$として$\Delta x \to 0$とすることによりx_Aにおける微分係数を求めてみる.
$x_B=5+\Delta x$, $x_C=5-\Delta x$, として$\Delta x \to 0$とすることによりx_Aにおける微分係数を求めてみる.

[問2]

$y = \dfrac{1}{x}$ について，x=5における微分係数を求めよ.

また，平均変化率の取り方を変えても微分係数の値が変わらないことを確かめよ.

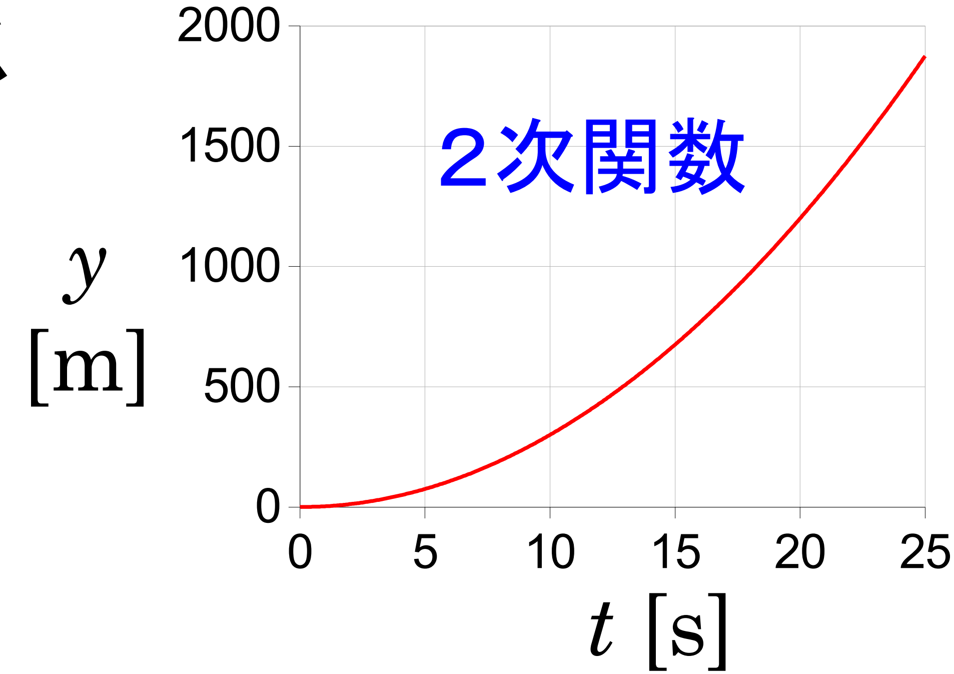
話を戻してまとめると

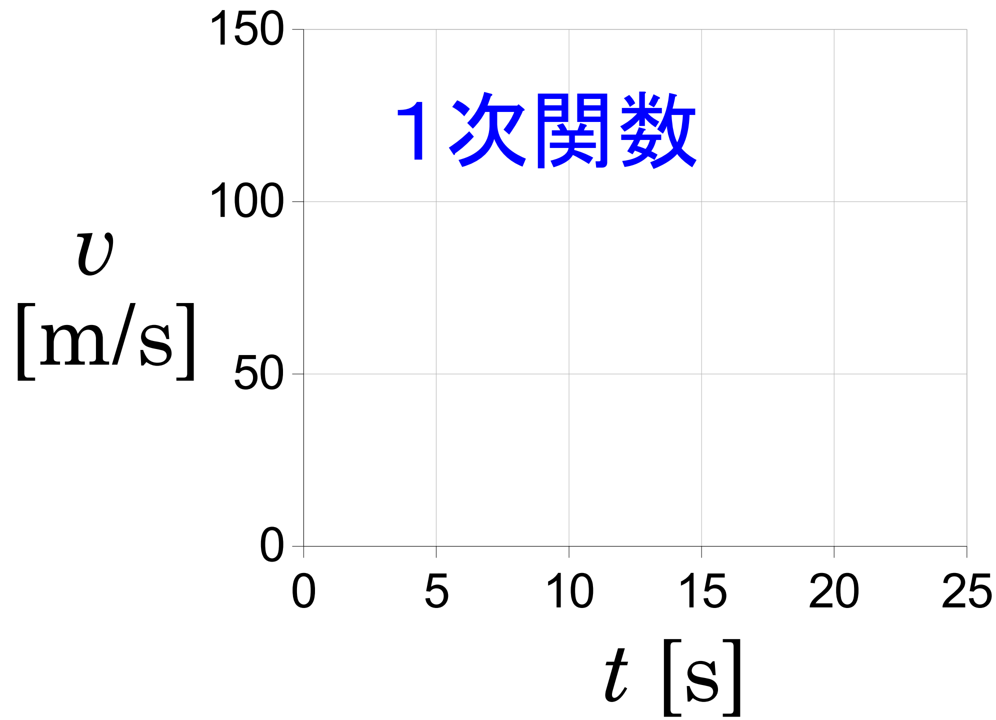
道のりyと時間tの関係が

$$y = 3t^2$$

であるとき，速さvは

$$v = \frac{dy}{dt} = 6t$$





ところで

速さvが

$$v=\frac{dy}{dt}=6\,t$$

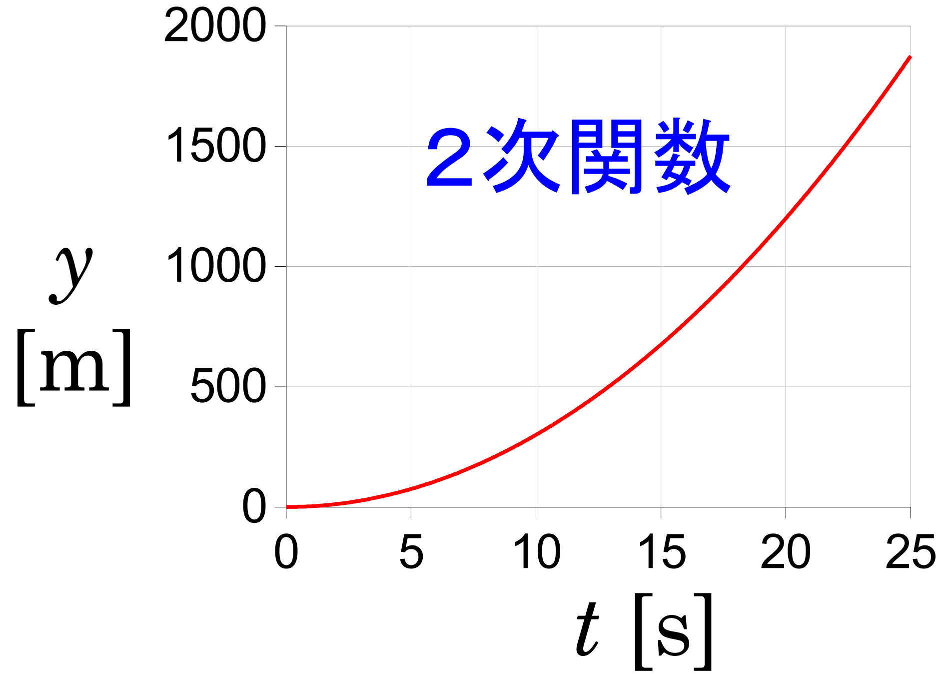
であるとき,

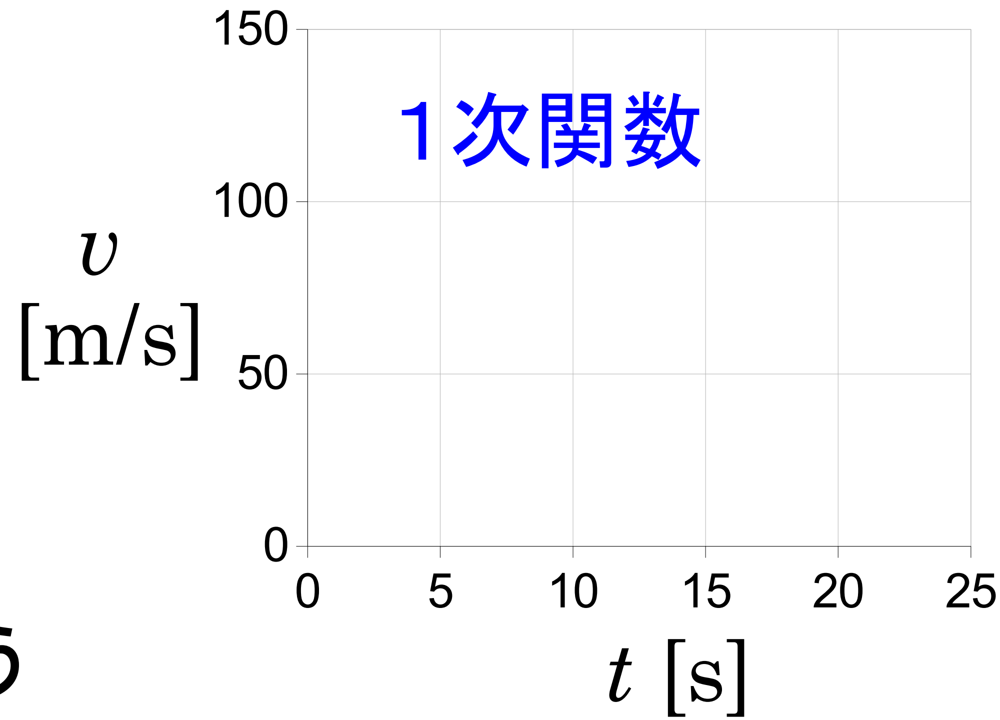
速さvの変化の割合は？

6 [m/s^2]

v-tグラフの傾き

これを加速度という





加速度とは ⇨ 速さの変化の割合 $\dfrac{dv}{dt}$

速さvの導関数が加速度

$v=\dfrac{dy}{dt}$ なので $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}v$ と書くと

$=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)$ であり,

$=\dfrac{d^2y}{dt^2}$ と書くこともできる.

yをtで２回微分するという意味

道のりyの２次導関数が加速度

道のり y [m]
時間　t [s]

速さ v [m/s]

[s]は[sec]，つまり[秒]

メートル毎秒

このとき，加速度は $[\mathrm{m/s^2}]$の単位を持つ

[問3]

斜面に沿ってボールを転がしたところ,ボールの速さv [m/s]は，経過時間t [s]の関数として

$$v = 4\,t$$

であった.

(a) このボールの加速度はどれだけか？

(b) このボールが転がった距離yをtの関数として求めてみよ.

(ヒント：例題1,2では$y=3t^2$のときに$v=6t$となったのだから，$v=4t$になるためには・・・・・)

あ～，疲れた！

食事が済んだら，さあ，再開だ～！

質問：これは某航空会社の機内食です．さて，どこの航空会社でしょう？
（これが分かる人は，相当海外旅行をしている人でしょう．）

ここまでやってきた数学の話と物理学の話を繋いで見ましょう. ニュートンの力学について少し説明します.

私たちは日常生活の中で, 物体の運動の法則に関していろいろなことを経験しています.

（1） 例えば, 自転車に乗っている人の背中を手で軽く押せば自転車は簡単に走り出しますが, 同じぐらいの力で乗用車を押しても乗用車は動きません.

（2） あるいは, 自転車に乗っている人の背中を手で押す場合でも, 軽く押すか, 強く押すかで自転車の加速の度合いが違います.

このような経験を数式で表現するのがニュートンの運動の第2法則です.

ニュートンの運動の第2法則

（力）＝（質量）×（加速度）

$$F = ma$$ （高校物理）

$$F = m\frac{dv}{dt}$$ （大学物理）

力 → 加速度

（原因）　（結果）

因果法則

ニュートンは，物体に働く力と物体の加速度の間に比例関係があることを発見した．その比例定数が質量である．

この法則は，私たちの世界の力学的運動を支配する基本法則．

力Fを受けてこの物体がどのような運動をするかは，この方程式を満たす関数vを求めることで調べることができる

さらに，位置（あるいは道のり）をyとするなら，

$$v = \frac{dy}{dx}$$

の関係を利用して位置yを時間の関数として求めること．

（力）＝（質量）×（加速度）

$$F = ma$$ （高校物理）

力Fにより質量1[kg]の物体が加速度1[m/s^2]で加速されているとき,その力Fの大きさは1[N]である.

単位は「ニュートン」

運動の第２法則について単位だけ見比べるなら

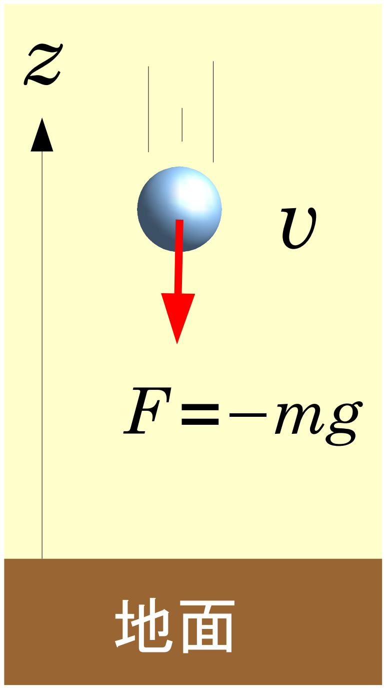
[N] = [kg]・[m/s^2]

という関係があります．すなわち

1 [N]= 1 [kg・m/s^2]

という関係があります.

自然落下する物体



ニュートンは物体の間には万有引力が働くことを発見した.

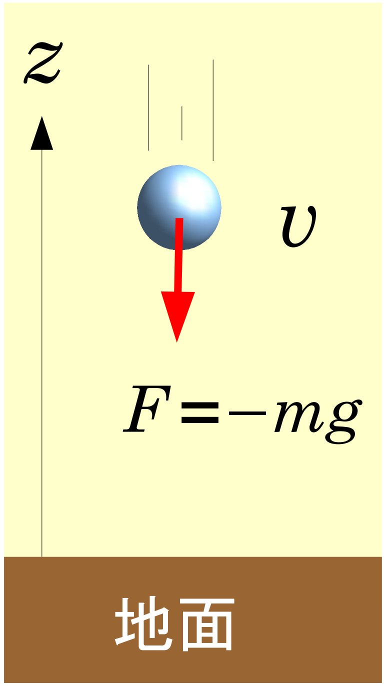
地球表面上にある質量mの物体と地球との間にも万有引力Fが働く. その力Fは次の式で与えられる.

$$\text{重力}\quad F=-mg$$

重力加速度という
g=9.8[m/s^2]

この符号は, 左の図のように, 上向きに座標軸を取った場合に,力が下向きであることを表現する

自然落下する物体



運動の第2法則 $F=m\dfrac{dv}{dt}$

重力 $F=-mg$

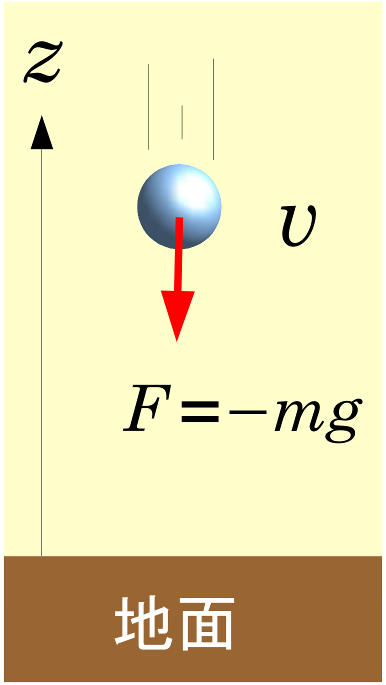
重力加速度　g=9.8[m/s^2]

二つの式を組み合わせると

$$m\frac{dv}{dt}=-mg$$

この方程式により物体の運動が記述されるので,**運動方程式**という. この運動方程式を満たす関数vを求めることを「運動方程式を解く」という.

この方程式は, 関数vの微分を含んだ方程式なので,数学的には**微分方程式**ということもできる. この微分方程式を満たす関数vを求めることを「微分方程式を解く」という.



ボールの位置座標zとボールの速度vとは

$$v = \frac{dz}{dt}$$

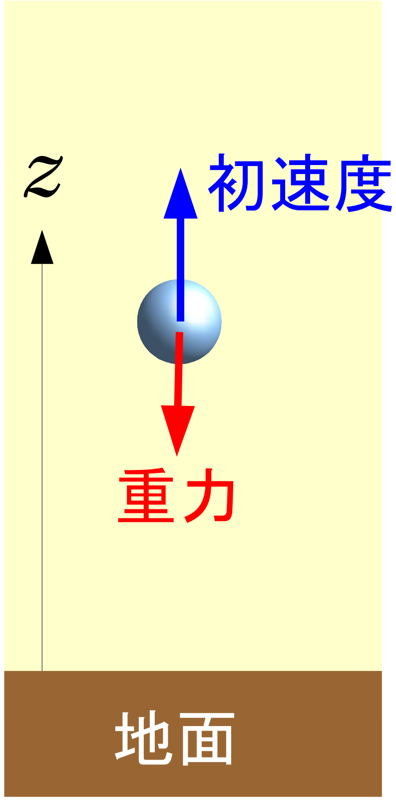
の関係があるので，前ページの運動方程式は

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -mg$$

と書くこともできる．zの２次導関数を含んだ微分方程式になっている．

重力加速度gにより自由落下するボールの場合であれば，このニュートンの運動方程式を解くことにより，任意の時刻 t における落下速度 $v(t)$, 位置 $z(t)$ を厳密に求めることができる．

[問4]



手に持ったボールを上向きに初速度5[m/s]で投げ上げた.
ボールの速さvが

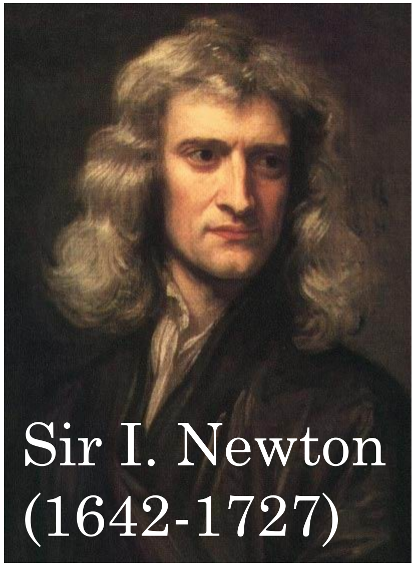
$$\frac{dv}{dt} = -9.8 \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

により時間変化している.
vは経過時間t [s]の関数としてどのように書き表されるであろうか.

ヒント:
[問3]と見比べてみよう.
初速度というのは時間t=0のときの速さ(速度)という意味です.

Newton力学

$$\frac{d}{dt}(m\,v)=F$$



「自然哲学の数学的諸原理(プリンキピア)」(1687)に運動の3法則が書かれている．　この本が発表されたのは40才を過ぎてからのことであるが，この3法則は20才過ぎの頃に既に完成していた．

日本では,1687年に将軍綱吉が「生類憐れみの令」を出しています．
あの有名なバッハ(J. S. Bach,(1685-1750)が2歳のころです．

このニュートンの運動方程式は物体の位置座標の時間発展を完全に記述する

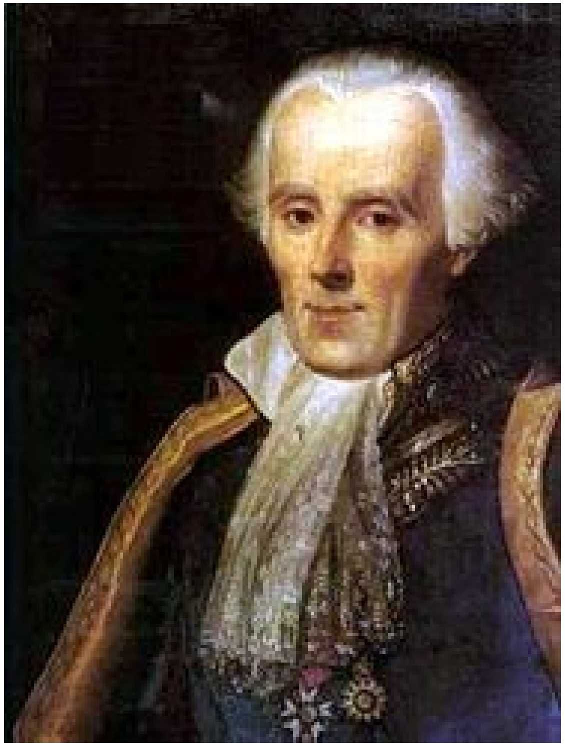
決定論的方程式です．
（物体の位置座標の時間変化を曖昧さなく決定してしまう方程式ということ）

ここからは，計算はありません．「お話」だけです．

物理学を学ぶ人にとって，「ラプラスの悪魔」,「マックスウェルの悪魔」という二人の怪物（？）と「シュレディンガーの猫」は大変馴染み深い存在です．

１番目の「ラプラスの悪魔」はニュートン力学と関係しています．
少し説明しましょう．

ラプラスの悪魔



ピエール＝シモン･ラプラス (1749-1827)

数学者でした.
フランス革命が1789年.
ベートーヴェンやモーツァルトの時代に
生きた人です.

（注） ニュートン （1642-1727）
徳川吉宗 （1684-1751）
ベートーベン (1770-1827)
交響曲第7番初演(1813)

ラプラス『確率の解析的理論』(1812年)

(ちなみに「のだめカンタービレ」で有名になったベートーヴェンの交響曲第7番の初演はこの翌年でした.)

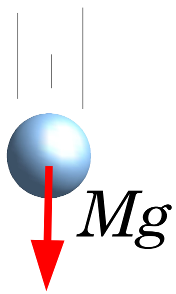
上記の本の中でラプラスは以下のようなことを書いています.

もしもある瞬間における全ての物質の力学的状態と力を知ることができ、かつ,もしもそれらのデータを解析できるだけの能力の知性が存在するとすれば、この知性にとっては、不確実なことは何もなくなり、その目には未来も(過去同様に)全て見えているであろう。

後で **ラプラスの悪魔**

と呼ばれるようになった

質問:「ラプラスの悪魔には過去，未来のすべてが判る」というのはどういう意味ですか？



例えば，重力加速度gにより自由落下するボールの場合であれば，ニュートンの運動方程式を解くことにより，任意の時刻 t における落下速度 $V(t)$，落下距離 $L(t)$ を厳密に求めることができます.

すなわち，私たちは，このボールの過去，未来を知っていることになります.

当時は，ニュートンの運動方程式は，全宇宙の力学的運動を表現することが可能な基本方程式と信じられていました.

原理的には，落体の例を，全宇宙の力学的運動にも応用することが可能です.
もしそのような膨大な計算を実行する能力を有する知性が存在するとすれば，その知性はあなたの過去，未来をも知りえる存在ということになります.

果たして，ラプラスの悪魔は存在するのでしょうか？

存在するとすれば，？？教における全知全能の神様のことでしょうか？？？

それとも，・・・・・

将来，コンピュータが高性能になれば，それらのコンピュータを用いてあなたの未来を完全に予言できるようになるかも？

さあ，あなたはどう考えますか？

今回はここまで

次回は「積分学入門」を予定しています．

Advanced Light Source(ALS), Berkeley Laboratory (USA)　2006.10.08

ALSは世界の放射光実験拠点の一つ．　大きなドーム状の建物の中で実験が行われる．ALSは山の上にある．山のすぐ下にはUC Berkeleyがあり，湾に向かってバークレーの市街地が広がる．湾の向こうにサンフランシスコ市街地が見える．ゴールデンゲートブリッジは右奥．