[問1] $y=8x^2$について，$x=5$における微分係数を求めよ．

また，平均変化率の取り方を変えても微分係数の値が変わらないことを確かめよ．

(1) $x_A=5,\ x_B=5+\Delta x$として$\Delta x\to 0$とすることによりx_Aにおける微分係数を求めてみる．　$y(x)=8x^2$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(5+\Delta x)-y(5)}{(5+\Delta x)-5}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8(5+\Delta x)^2-8\cdot 5^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8(5^2+2\cdot 5\Delta x+(\Delta x)^2)-8\cdot 5^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8(2\cdot 5\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}8(10+\Delta x)=80 \quad \cdots ①$$

(2) $x_B=5+\Delta x,\ x_C=5-\Delta x$, として$\Delta x\to 0$とすることにより$x_A$における微分係数を求めてみる．

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(5+\Delta x)-y(5-\Delta x)}{(5+\Delta x)-(5-\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8(5+\Delta x)^2-8(5-\Delta x)^2}{2\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8(5^2+2\cdot 5\Delta x+(\Delta x)^2)-8(5^2-2\cdot 5\Delta x+(\Delta x)^2)}{2\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{160\Delta x}{2\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}80$$

$$=80 \quad \cdots ②$$

①，②は同じ値．　したがって，微分係数は平均変化率の定義の仕方に依存しない

[問2] $y=\dfrac{1}{x}$ について，x=5における微分係数を求めよ.

また，平均変化率の取り方を変えても微分係数の値が変わらないことを確かめよ.

$$y(x)=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(5+\Delta x)-y(5)}{(5+\Delta x)-5}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{5+\Delta x}-\dfrac{1}{5}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{-\Delta x}{(5+\Delta x)5}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(5+\Delta x)5}=\frac{-1}{25}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(5+\Delta x)-y(5-\Delta x)}{(5+\Delta x)-(5-\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{5+\Delta x}-\dfrac{1}{5-\Delta x}}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{-2\Delta x}{(5+\Delta x)(5-\Delta x)}}{2\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(5+\Delta x)(5-\Delta x)}=\frac{-1}{25}$$

したがって，微分係数は平均変化率の定義の仕方に依存しない

[問3] 斜面に沿ってボールを転がしたところ,ボールの速さv [m/s]は，経過時間t [s]の関数として

$$v=4t$$

であった.

(a) このボールの加速度はどれだけか？

(b) このボールが転がった距離yをtの関数として求めてみよ.
(ヒント：例題1,2では$y=3t^2$のときに$v=6t$となったのだから，$v=4t$になるためには・・・・・)

(a) $v=4t$の係数4が加速度を与える.　答は4 [m/s^2]

(b) $y=3t^2$のとき，$v=6t=2\times3t$

y=3t²を微分したときに，どのようにして
6という係数が出てきたかを考える

よって$v=4t=2\times2t$のときは$y=2t^2$

（補足）一般に $y=ax^2$のとき （ただし，aは定数）

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{a(x+\Delta x)^2-ax^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{a(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-ax^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{a(2x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}a(2x+\Delta x)=2ax$$

もちろん$a=2$とすれば問(b)に対応する

[問4] 手に持ったボールを上向きに初速度5[m/s]で投げ上げた．
ボールの速さvが

$$\frac{dv}{dt}=-9.8 \quad [\mathrm{m/s^2}] \qquad \cdots\cdots ①$$

により時間変化している．vは経過時間t [s]の関数としてどのように書き表されるであろうか．

加速度が–9.8[m/s^2]ということなので，問3と見比べると v=–9.8t にすれば良いのかな・・・・？しかし，v=–9.8t でt=0にすると v=0 となってしまい，問題文にある初速度5[m/s]の条件を満たしていないことがわかる．さて，困った！

ところで，一般に $v(t)=at+b$ (a,bは定数)とするとき，その導関数は

$$\frac{dv(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\lim\frac{a(t+\Delta t)+b-(at+b)}{\Delta t}=\lim\frac{a\Delta t}{\Delta t}=a$$

よって，定数bの値は，vの微分係数(あるいは導関数)に影響しない．
このことを裏返して考えると，仮にvの導関数が分かっていたとしても,自動的にbの値は決まらないということでもある．bの値を決めるためには別の条件が必要となる．この条件が問4における初速度なのである．

つまり，単純に問3と見比べてv=–9.8t にすれば良いのではなくて，①の方程式を満たすvは
v=–9.8t +b (ただしbは任意定数)の形を持っていると考えるのが，より一般的である．
そして，このbの値は初速度が5[m/s]になるように決めれば良い．
したがって，v=–9.8t +5 が解答である．

前回の問5(1)　$y = x^2 + 2x + 1$

答　$\dfrac{dy}{dx} = 2x + 2$

これを一般化して,$y=Ax^2+Bx+C$　(A,B,Cは任意定数)の導関数を求めておこう.

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

この導関数には C の影響がないことは明らかである.
この結果を覚えておこう.　同様にして,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A$$

となり, yの2次導関数はBに影響されない.

このような性質は物理学の問題を理解する上で重要です.