数学と理科の接点

「中学生にわかる微積分学」

その3

積分学入門

岡田耕三
（岡山大学大学院自然科学研究科）

今回の予定

「速さ」についての復習

積分学入門

(高校数学レベル）

このテキストを読んで問1-6に答えて下さい．

期日は1/16(金)とします．
できた範囲内で答案を提出してくだされば十分です．
あるいは，このテキストの問は別にして，自分で勉強したことをレポートにまとめて下さってもOKです．


(出典:Wikipedia)

岡山-新大阪
180km (新幹線)
所要時間 44分

第1経路

所要時間	44分
乗車キロ	180.3 km
合計	6060円
定期	一ヶ月 130140円

乗換	着発	所要	駅名／路線・列車名	運賃
	15:14		岡山	
	◎	44分	新幹線のぞみ32号	2940円
	15:58		新大阪	

http://www.hyperdia.com/

$$分速 = \frac{180\text{km}}{44分} = 4.1\ \text{km}/分$$

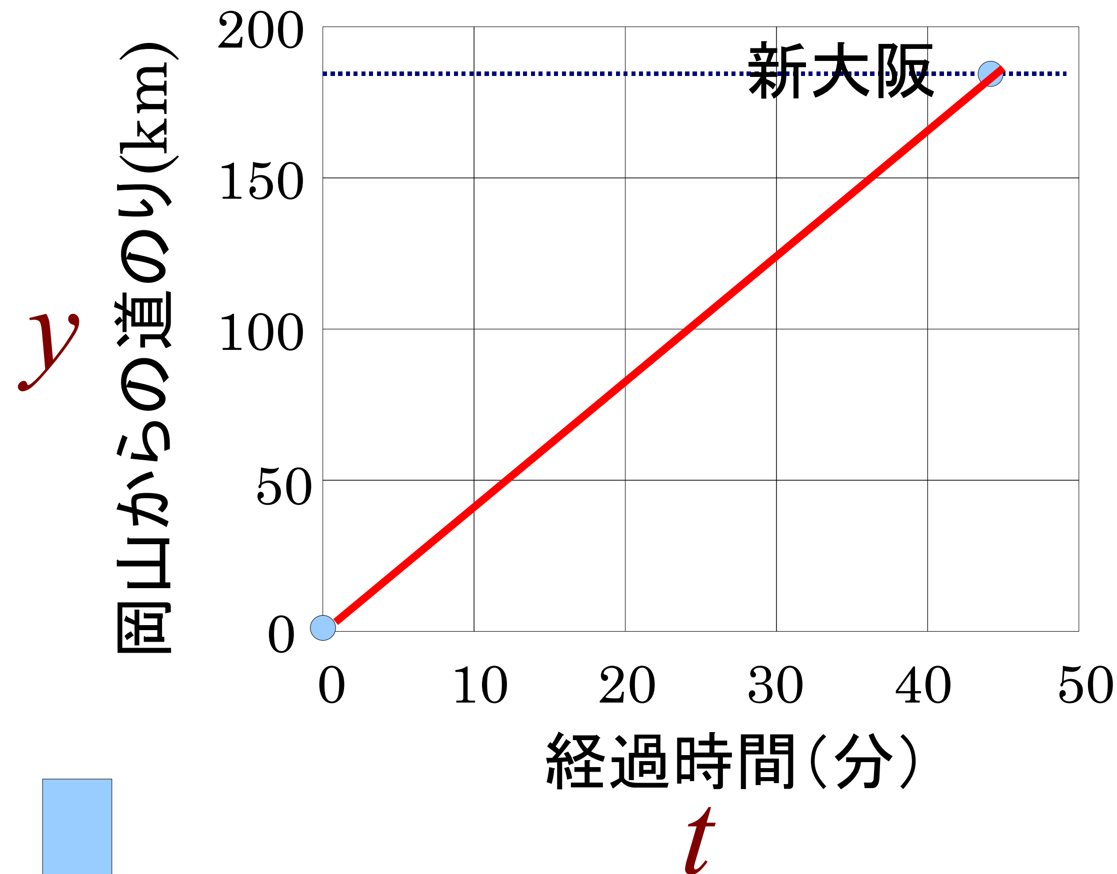
同じ速さ

$$時速 = \boxed{4.1 \times 60 = 246\ \text{km}/時}$$

新幹線の時速を求めるために,ホントに新幹線を1時間走らせる必要はない.
ほんの短時間で走った距離が分かれば新幹線の速さは分かる.
その「短時間」をどんどん短くしていったら・・・・というのが微分の話に繋がります.

経過時間と道のりの関係（速さが4.1[km/分]の場合）

経過時間 t [分]	走った道のり y [m]
10	41
20	82
30	123
40	164



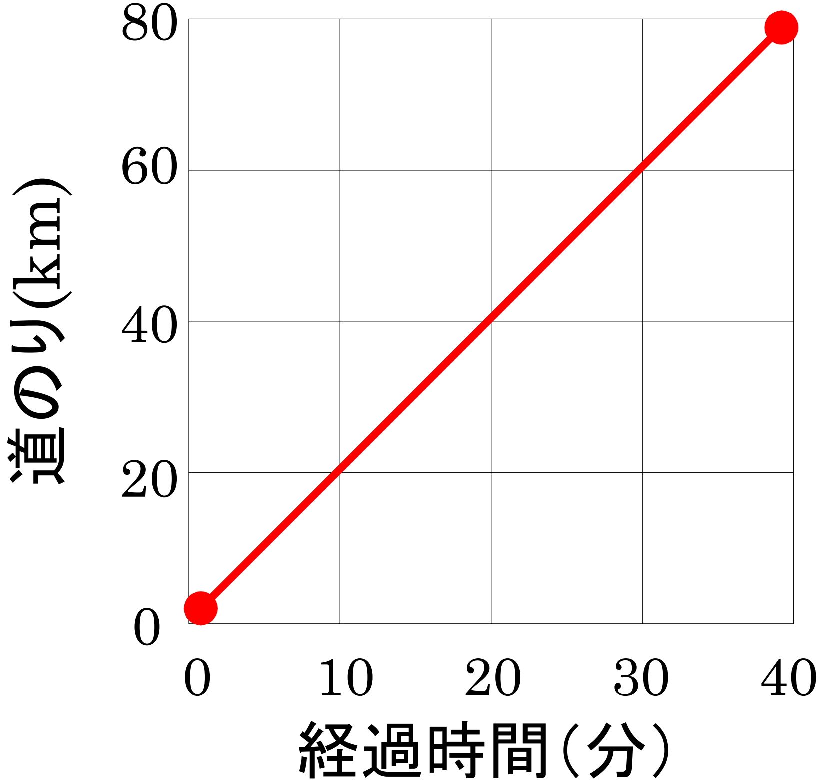
$$y = 4.1\,t$$

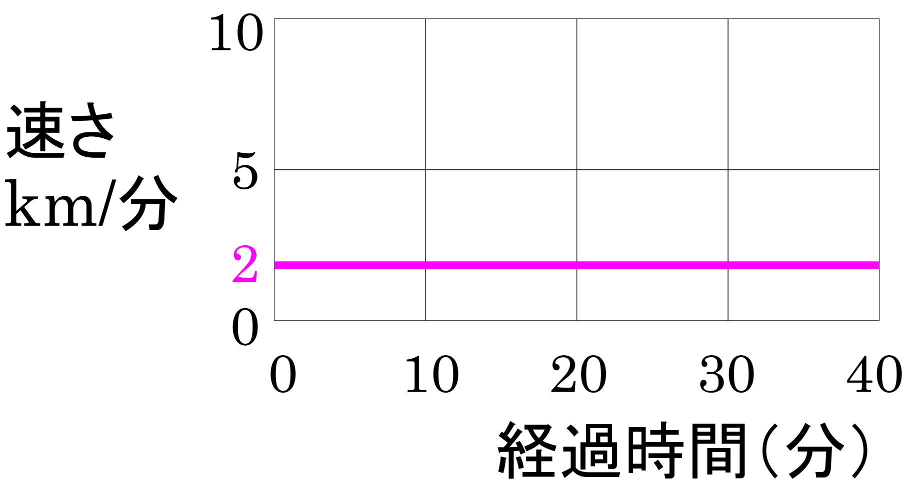
（ t に関する1次関数）

直線の傾き＝速さ

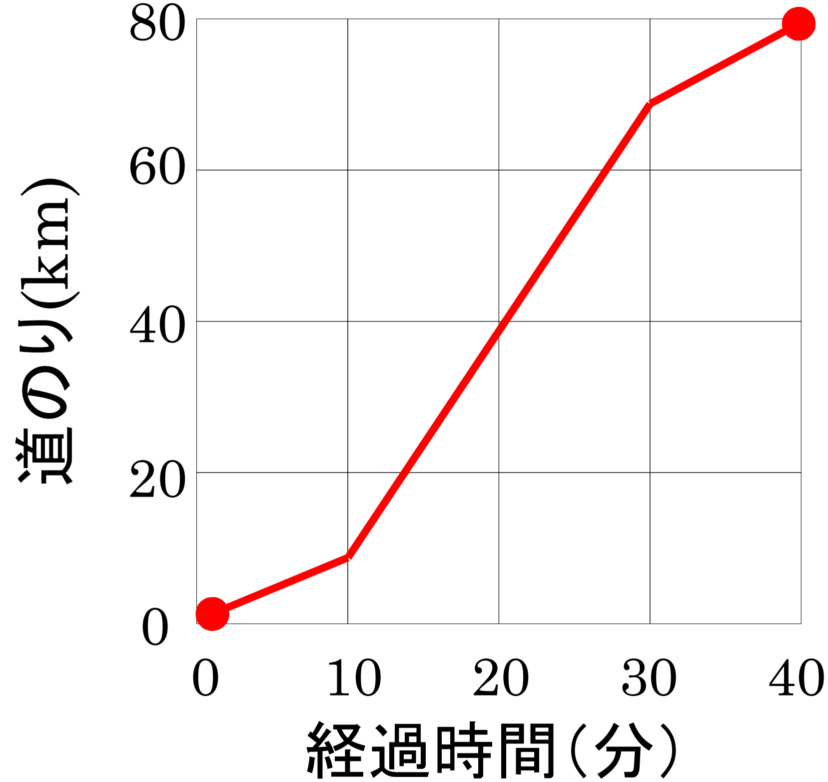
速さを知りたければ傾きを調べれば良い

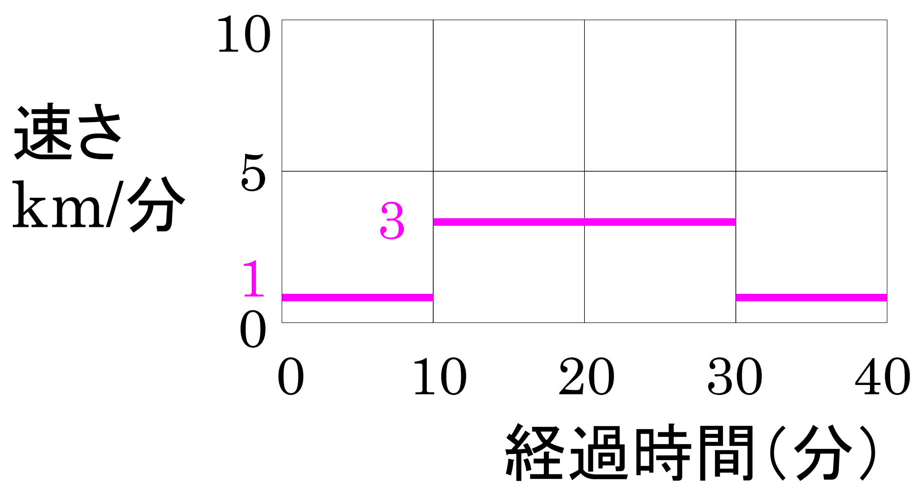
速さが2[km/分]の場合

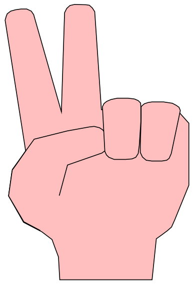




途中で速さが変わる場合







速さは
「時間−道のり」グラフの傾き

「時間−道のり」が折れ線や曲線になると，**速さも時間変化する**

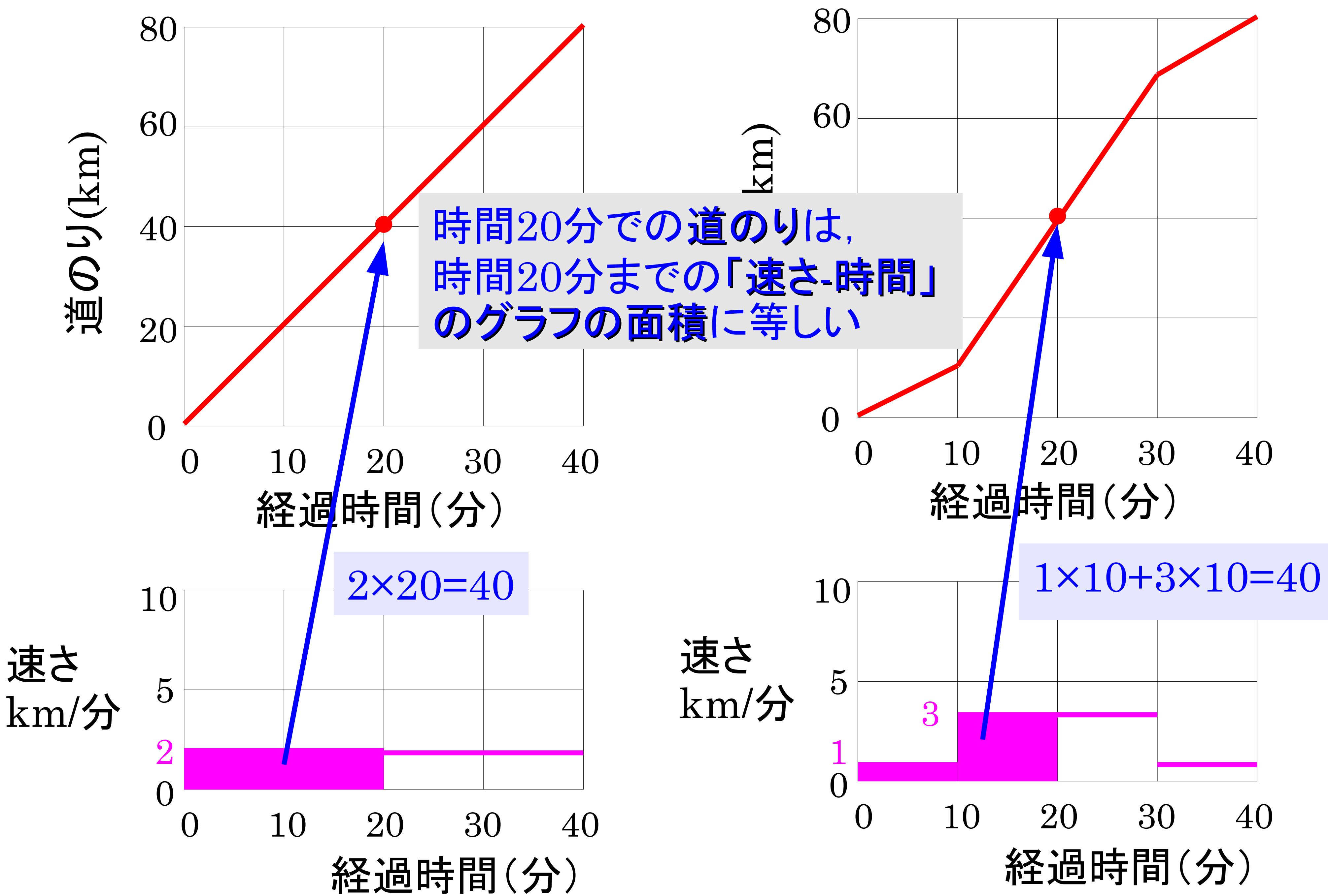
前回までは道のりと速さの関係の話から微分の話をしました.

「道のり-時間」のグラフ
「速さ-時間」のグラフ

これらの関係について別の角度から見てみましょう

速さが2[km/分]の場合

途中で速さが変わる場合

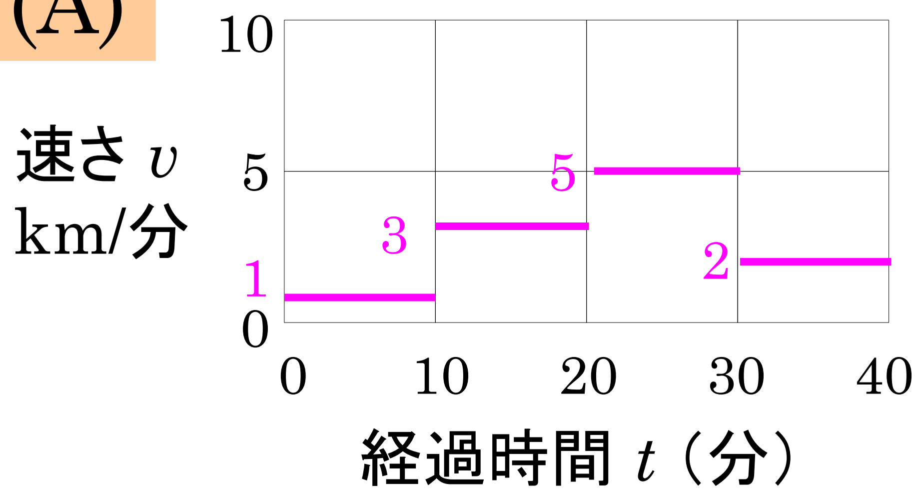


問1

乗り物の速さvが経過時間 t と共に右のグラフ(A) のように変化した.

この乗り物は20分後にはどれだけの道のりを走ったか？
40分後の道のりはどうか？

(A)

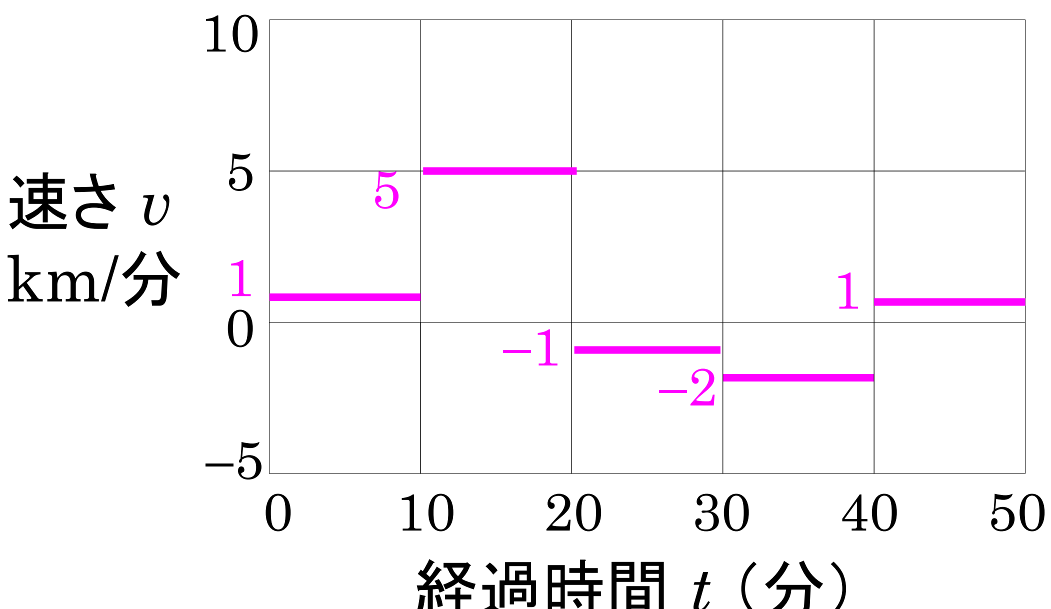


問2

乗り物が直線道路を走っている. 速さvが経過時間 t と共に右のグラフ(B) のように変化したとしよう. ただし, 速さが負になっている場合は, 乗り物が逆走していることを意味する.

出発後20分後, 30分後, 50分後にこの乗り物は出発点からどれだけ離れた地点に達しているか求めよ.

(B)



このように「時間-道のり」の関係が直線，折れ線のときは，

時間t での**道のり**は，
時間t までの**「速さ-時間」のグラフの面積**
に等しい

ということを簡単に確認することができます．

ただし，問2のように逆走している場合は少し注意が必要です．
逆走した部分の面積は引き算する必要があります．
（**これ，結構重要です．**）

では，「時間-道のり」の関係が
直線，折れ線でないときは，どうでしょう？

ちょっと休憩！

この時間は日本時間です．
現地時間とは7時間ずれています．

さて，これはどこの写真でしょう？
（この構図は・・・・・）

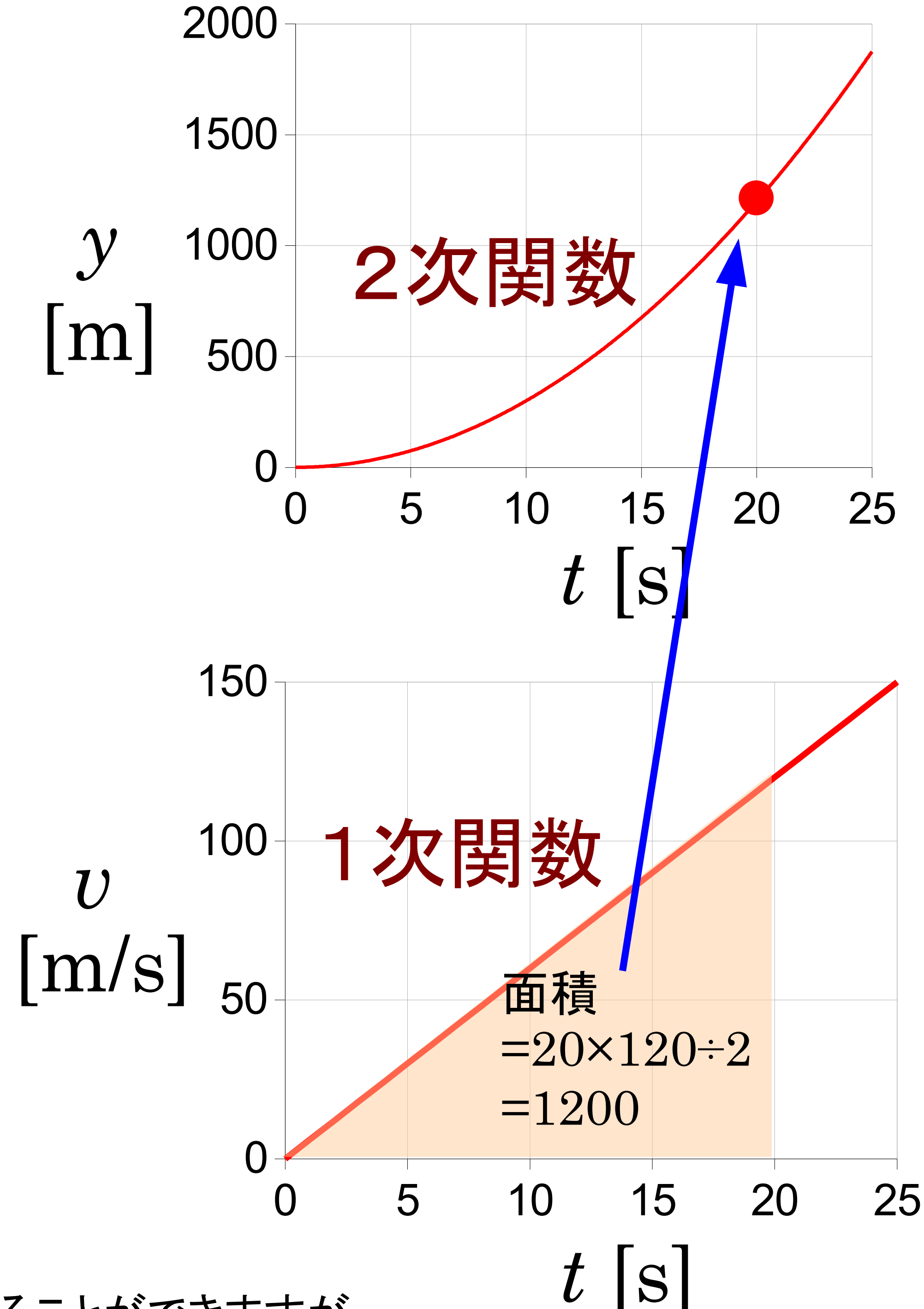
「時間-道のり」の関係が
直線，折れ線でないときは，
どうでしょう？

道のりyと時間tの関係

$$y = 3t^2$$

速さv

$$v = \frac{dy}{dt} = 6t$$



やはり

時間t での道のりは，
時間t までの「速さ-時間」のグラフの面積に等しい

という関係が成り立っています

この場合，面積は3角形の面積の公式で求めることができますが，
次のページで少し違う見方をして見ましょう

関数 $v = v(t)$ の下の領域を右のように長方形で埋め尽くす.

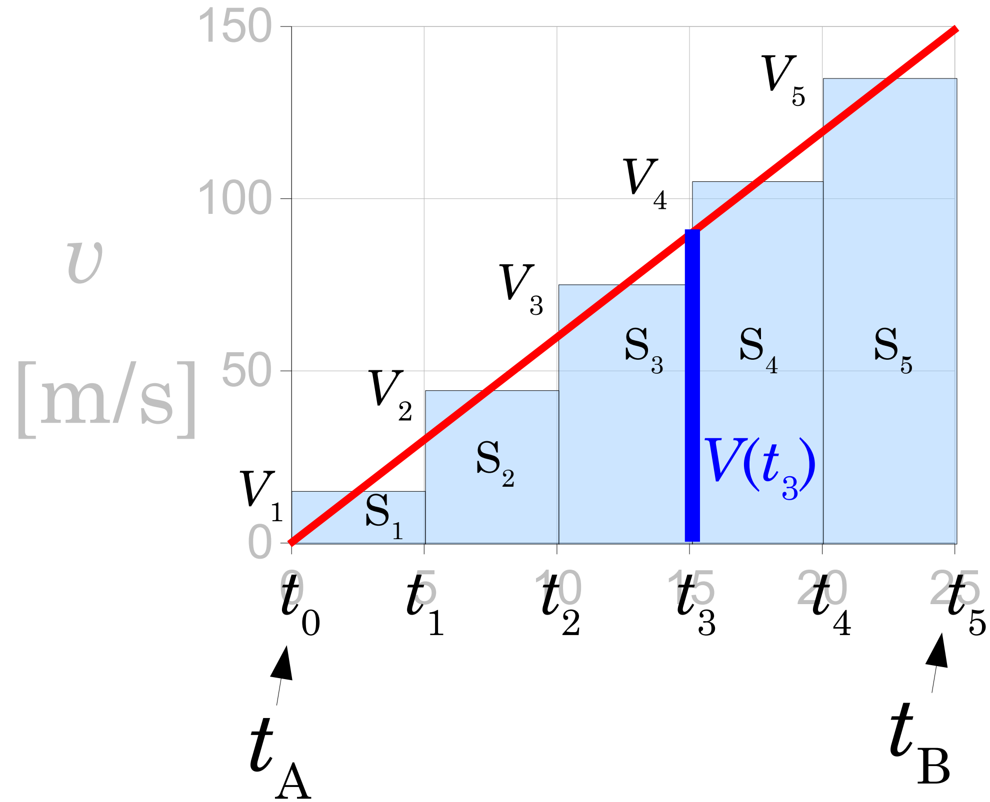
左端=$t_A(=t_0)$, 右端=$t_B(=t_5)$

時間t_{i-1},t_iで区切られた長方形の面積S_iは

i=1,2,3,4,5

$$S_i = V_i \times (t_i - t_{i-1})$$

$$V_i = \frac{v(t_i)+v(t_{i-1})}{2}$$



赤の直線の下の3角形の領域の面積と5つの長方形の面積の和が等しいのは明らか.

$t_i - t_{i-1} = \Delta t$ と書くと

$$S_i = V_i \Delta t \quad \cdots\cdots (1)$$

ところで，速さvと道のりyとの関係は

$$v(t)=\frac{dy(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t)-y(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

速さvは道のりyの微分で与えられる

とすると　$\Delta t\to 0$とする前の式として

$$V_i=\frac{y(t_i)-y(t_{i-1})}{\Delta t}$$

と表現することができる

これを使うと 式(1)は

$$S_i=V_i\Delta t=\frac{y(t_i)-y(t_{i-1})}{\Delta t}\Delta t=y(t_i)-y(t_{i-1}) \quad \cdots\cdots(2)$$

と書ける.

$v(t)$の面積S_iが
区間の長方形の両端t_i, t_{i-1}での$y(t)$の値
により決まることが分かった.

式(2)を使えば，長方形の総和は

$$
\begin{aligned}
S &= S_1 + S_2 + \cdots + S_5 \\
&= [\cancel{y(t_1)} - y(t_0)] + [\cancel{y(t_2)} - \cancel{y(t_1)}] + \cdots + [y(t_5) - \cancel{y(t_4)}] \\
&= y(t_5) - y(t_0) \qquad \cdots\cdots(3)
\end{aligned}
$$

右端　　左端

$v(t)$の面積Sが
区間の両端t_A, t_Bでの$y(t)$の値
により決まることが分かった.

ところで

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_5 = \sum_{i=1}^{5} S_i$$

とも書く.

Σはギリシャ文字のシグマの大文字です．アルファベットのSのことです．$i=1$から5までS_iの和をとる，という意味です．

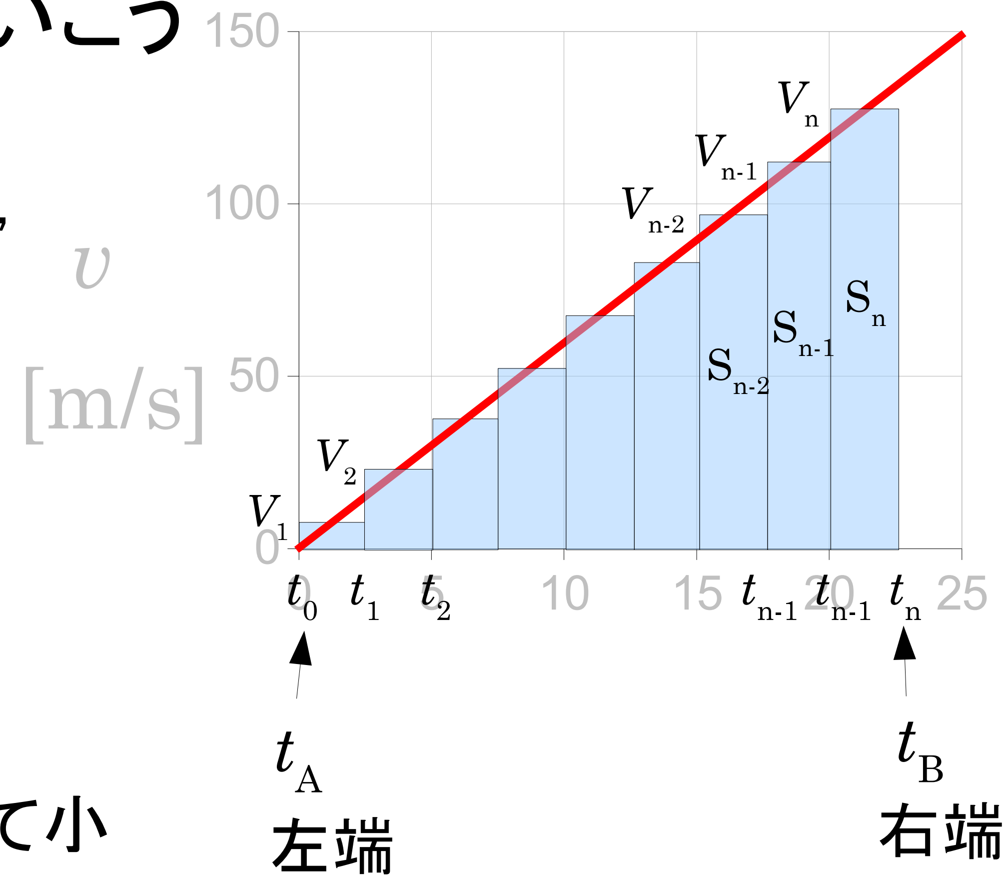
$$S_i = V_i \Delta t$$

だったので

$$S = \sum_{i=1}^{5} V_i \Delta t$$

とも書ける

ここまでの話を**一般化**していこう



5枚の長方形で分割していたが，それをn枚の長方形に変更しよう．

各長方形の横幅Δtは

$$\Delta t = \frac{t_B - t_A}{n}$$

となる．

nを大きくするとΔtは反比例して小さくなる．

一方，面積Sは

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta t \qquad \cdots\cdots(4)$$

と書ける．しかも，(2)を使えば(4)の替わりに

$$S = y(t_n) - y(t_0) = y(t_B) - y(t_A) \qquad \cdots\cdots(5)$$

$$S=\sum_{i=1}^{n} V_i \Delta t$$ は$\Delta t\to 0$の極限で

($n\to\infty$)

$$S=\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt \qquad \cdots\cdots(6)$$

と書く. これを**定積分**という

- 「積分の区間がはっきり定まった積分」という意味
- $\int$ はSが縦長になったと思ってください.

ここまでの話でも分かるように,
積分というのは,「足し算の一種」だと思っておけば良い.
例題で見たように面積を求めていると思っておけば良い.

$$v(t)=\frac{dy(t)}{dt}$$ であるとき，式(6)は

$$S=\int_{t_A}^{t_B} v(t)\,dt=\int_{t_A}^{t_B} \frac{dy(t)}{dt}\,dt$$

一方，式(5)によれば

$$S=y(t_B)-y(t_A)$$

なのだから

$$S=\int_{t_A}^{t_B} v(t)\,dt=\int_{t_A}^{t_B} \frac{dy(t)}{dt}\,dt=y(t_B)-y(t_A)$$

という式を導いたことになる．つまり，

区間$[t_A, t_B]$での$v(t)$の定積分は$y(t_B)-y(t_A)$で与えられる

ここまでに分かったこと

区間$[t_{\mathrm{A}}, t_{\mathrm{B}}]$での関数$v(t)$の定積分の値$S$は

$$v(t)=\frac{dy(t)}{dt}$$

を満たす関数 $y(t)$ により

$$S=\int_{t_A}^{t_B} v(t)\,dt=y(t_B)-y(t_A)$$

と与えられる.

したがって,

ある関数$v(t)$の定積分を求めようとする場合，まず

$$v(t)=\frac{dy(t)}{dt}$$

の関係を満たす関数 $y(t)$ を求める必要がある

$$v(t)=\frac{dy(t)}{dt}$$

の関係を満たす関数 $y(t)$ を $v(t)$ の不定積分といい $\int v(t)dt$

と書く.

積分の区間が定まっていない積分という意味

$$y(t)=\int v(t)dt$$

[例]

$y=3t^2$ を微分すると $\frac{dy}{dt}=6t$

であったので，$3t^2$は$6t$の不定積分である.

$$\int 6tdt=3t^2$$

実は・・・　（次ページ参照）

（注）

$y=3t^2+C$ を微分すると $\dfrac{dy}{dt}=6t$

任意の数

なので，$6t$の不定積分は$3t^2+C$であるとするのが良い．
したがって

$$\int 6t\,dt=3t^2+C$$

積分定数と呼ぶ

（任意の数）

例題

$y = 8x$ の不定積分を求めよ.

$4x^2 + C$ を微分すると $8x$ なので

任意定数

$8x$ の不定積分は

$$\int 8x\,dx = 4x^2 + C$$

例題

定積分 $\int_1^3 6x\,dx$ を求めよ.

$3x^2+C$ を微分すると $6x$ なので

任意定数

$$\int_1^3 6x\,dx = \left[3x^2+C\right]_{x=1}^{x=3}$$

「x=3のときの$3x^2$+Cの値 と x=1のときの$3x^2$+Cの 値の差」を計算するという意味

$$=\left[3\cdot 3^2+C\right]-\left[3\cdot 1^2+C\right]$$

$$=27-3 \quad =24$$

積分定数Cの値は定積分の値には影響しないことが分かる
（普通は，Cを無視して，はじめから書かない．）

問3　次の関数の不定積分を求めよ.

(1) $y=5$

(2) $y=2x+5$

(3) $y=\dfrac{-1}{(x+5)^2}$

ヒント: 第1，2回の宿題と見比べる

問4　次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^5 (4x+2)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+2)^2}\,dx$

例題

止まっていた人が一定の加速度a=2 [m/s^2]で走り出した.
(1) 5秒後のこの人の速さvを求めよ.
(2) t_A 秒後のこの人の速さvを求めよ.
(3) はじめの3秒間にこの人が走った距離Lを求めよ.

(1)

$$v=\int_0^5 2\,dt=[2t]_{t=0}^{t=5}=10-0=10 \quad [\mathrm{m/s}]$$

(2)

$$v=\int_0^{t_A} 2\,dt=[2t]_{t=0}^{t=t_A}=2t_A-0=2t_A$$

(3) 前問より，時刻tにおける速さは$v(t)$=2tだから

$$L=\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^3 2t\,dt=[t^2]_{t=0}^{t=3}=3^2-0=9 \quad [\mathrm{m}]$$

問5

止まっていた自動車が一定の加速度a=3 [m/s^2]で動き出した.

(1) 3秒後の自動車の速さvを求めよ.
(2) t 秒後の自動車の速さvを求めよ.
(3) 最初の3秒間に自動車が走った距離を求めよ.
(4) 次の3秒間に自動車が走った距離を求めよ.

問6

地表すれすれからボールを真上へ投げ上げたところ，ボールの速さv [m/s]は経過時間 t [s]の関数としてv=50−9.8tのように変化した．ただし，速さの値が正の場合はボールは上向きに飛び，負の場合は下向きに飛んでいることを意味する.

(1) 3秒後のボールの高さは何[m]か？
(2) ボールが達した最高の高さはどれだけか？
(3) 再びボールが地表に戻ってくる時間は何秒後か？

ヒント：計算問題として考えようとする難しく感じるが，グラフを書いて考えてみると案外簡単.
できれば両方のやり方を習得できるのが望ましい.

今日はここまで

今回もかなり高度なところまで来てしまいました．
高校3年生レベル，あるいは大学1年生レベルかな．
ちょっとやり過ぎちゃったかもしれない．

だから，もし，あまりできなくっても気にしないでね．

さて，次回はどうしようかな・・・・
微積分から離れて別の数学をしようかな．

名画を見て目の保養をしましょう

（この絵はパリのオルセー美術館で見ることができます）